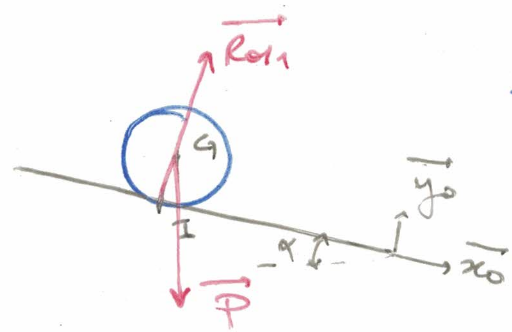
Dynamique - Cylindre

Q1)



BAME : $\vec{R_{0/1}} = N_{01}\cdot\vec{y_0}$

$\vec{P} = -mg\cos\alpha\,\vec{y_0} + mg\sin\alpha\,\vec{x_0}$

Théorème de la résultante dynamique à [1] sur $\vec{x_0}$:

$$m\cdot\ddot{x} = mg\sin\alpha \Rightarrow \boxed{\gamma_g = \ddot{x} = g\sin\alpha}$$

Q2) Lois de mouvement :

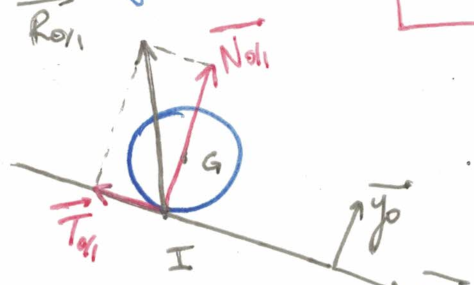
$$\begin{cases} \ddot{x} = g\sin\alpha & \\ \dot{x} = g(\sin\alpha)\,t & (\dot{x}(0)=0) \\ x = \dfrac{g\sin\alpha}{2}\cdot t^2 & (x(0)=0) \end{cases}$$

pour parcourir la distance L, il faut :

$$x(t_g) = L = \frac{g\cdot\sin\alpha}{2}\,t_g^2 \Rightarrow \boxed{t_g = \sqrt{\frac{2L}{g\sin\alpha}}}$$

La vitesse finale sera $\boxed{\dot{x}(t_g) = V_g = g\cdot\sin\alpha\cdot t_g = \sqrt{2gL\sin\alpha}}$

Q3)



La composante tangentielle due au frottement s'oppose à la tendance au glissement, donc

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{R_{0/1}} = N_{01}\cdot\vec{y_0} - T_{01}\,\vec{x_0} \\ &\text{avec} \quad T_{01} \leq f\cdot N_{01} \end{aligned}}$$

Q4) $\vec{V_{G\in 1/0}} = \dot{x}\,\vec{x_0}$

donc $\vec{V_{I\in 1/0}} = \vec{V_{G\in 1/0}} + \vec{IG}\wedge\vec{\Omega_{1/0}} = \dot{x}\,\vec{x_0} + R\vec{y_0}\wedge\dot{\theta}\vec{z_0} = (\dot{x} + R\dot{\theta})\,\vec{x_0}$

or il y a roulement sans glissement en I donc $\vec{V_{I\in 1/0}} = \vec{0}$

on en déduit : $\dot{x} + R\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = -\dfrac{\dot{x}}{R}}$

Q5] Au centre de gravité : $\{\mathcal{D}_{1/0}\} = \begin{cases} \overrightarrow{R_{d1/0}} = m \cdot \overrightarrow{\Gamma_{G\in 1/0}} \\ \overrightarrow{\delta_{G\in 1/0}} = \dfrac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_{G\in 1/0}}\Big|_0 \end{cases}$ avec $\overrightarrow{\sigma_{G\in 1/0}} = \overline{\overline{I_{G,1}}} \cdot \overrightarrow{\Omega}$

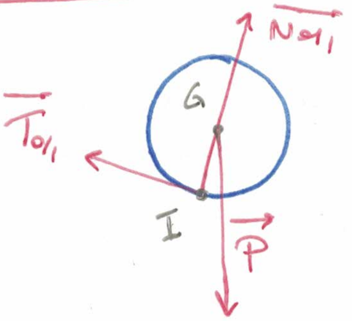
donc $\overrightarrow{\Gamma_{G\in 1/0}} = \dfrac{d}{dt} \overrightarrow{V_{G\in 1/0}}\Big|_0 = \dfrac{d}{dt}\, \dot{x}\, \overrightarrow{x_0}\Big|_0 = \ddot{x}\, \overrightarrow{x_0}$

$$\overrightarrow{\sigma_{G\in 1/0}} = \overline{\overline{I_{G,1}}} \cdot \dot{\theta}\, \overrightarrow{z_0} = I_{zz} \cdot \dot{\theta}\, \overrightarrow{z_0}$$

$$\overrightarrow{\delta_{G\in 1/0}} = I_{zz} \cdot \ddot{\theta} \cdot \overrightarrow{z_0} \quad \text{avec} \quad \ddot{\theta} = -\frac{\ddot{x}}{R}$$

On en déduit : $\boxed{\{\mathcal{D}_{1/0}\} = \begin{cases} \overrightarrow{R_{d1/0}} = m \cdot \ddot{x}\, \overrightarrow{x_0} \\ \overrightarrow{\delta_{G\in 1/0}} = -I_{zz} \cdot \dfrac{\ddot{x}}{R} \cdot \overrightarrow{z_0} \end{cases}}$

Q6] On isole 1



$$\{\tau_{0/1}\} = {}_I\begin{Bmatrix} -T_{01} & \emptyset \\ N_{01} & \emptyset \\ \emptyset & 0 \end{Bmatrix}_{R_0}$$

$$\{\tau_{pes/1}\} = {}_G\begin{Bmatrix} mg \sin\alpha & \emptyset \\ -mg\cos\alpha & \emptyset \\ \emptyset & 0 \end{Bmatrix}_{R_0}$$

On calcule les moments en G :

$$\overrightarrow{M_{G,0/1}} = \underbrace{\cancel{\overrightarrow{M_{I,0/1}}}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{GI} \wedge \overrightarrow{R_{0/1}} = \begin{vmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{vmatrix}_{R_0} \wedge \begin{vmatrix} -T_{01} \\ N_{01} \\ 0 \end{vmatrix}_{R_0} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -R\,T_{01} \end{vmatrix}$$

On applique le Principe Fondamental de la dynamique en G :

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{TRD sur } \vec{x} : & m\ddot{x} = -T_{01} + mg\sin\alpha & (1) \\ \text{sur } \vec{y} : & 0 = N_{01} - mg\cos\alpha & (2) \\ \text{TMD en G sur } \vec{z} : & -I_{zz}\dfrac{\ddot{x}}{R} = -R\,T_{01} & (3) \end{array}}$$

Q7] On déduit T_{01} de (1) : $T_{01} = mg\sin\alpha - m\ddot{x}$

On remplace dans (2) : $I_{zz} \cdot \dfrac{\ddot{x}}{R} = R(mg\sin\alpha - m\ddot{x})$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}\left(\frac{I_{zz}}{R} + mR\right) = Rmg\sin\alpha \qquad \text{or } I_{zz} = \frac{mR^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} \cdot \frac{3}{2}\cancel{mR} = \cancel{mR}\, g\sin\alpha \quad \Rightarrow \boxed{\frac{3}{2}\ddot{x} = g\sin\alpha}$$

Q8) Lois du mouvement : $\ddot{x} = \frac{2}{3} \cdot g \cdot \sin\alpha$

$$\dot{x} = \frac{2}{3} g \cdot \sin\alpha \, t \qquad (\dot{x}(0) = 0)$$

$$x = \frac{1}{3} \cdot g \cdot \sin\alpha \cdot t^2 \qquad (x(0) = 0)$$

Temps pour parcourir la distance L : $\boxed{t_f = \sqrt{\frac{3L}{g \cdot \sin\alpha}}}$

Vitesse finale : $\boxed{V_f = \sqrt{\frac{4}{3} g L \sin\alpha}}$

Q9) Le temps de descente est plus long dans le cas du roulement, la vitesse finale est aussi inférieure.

Il est donc plus rapide de glisser.

Mais on ne peut pas choisir de glisser ou rouler, cela dépend du coefficient de frottement 0/1.

Rmq : Dans les deux cas (roulement ou glissement), l'énergie cinétique de [1] au point A sera identique.

en glissement : $T_{1/0} = \frac{1}{2} m \cdot V_g^2$ (translation)

en roulement : $T_{1/0} = \frac{1}{2} m V_r^2 + \frac{1}{2} I_{zz} \cdot \dot{\theta}^2$ (translation + rotation)