DS2 - Eléments de Corrigé

Q1) $D = D_0 + 2L\sin\alpha \qquad (\alpha < 0)$

Q2) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \begin{array}{l} /\vec{x_1} \\ /\vec{y_1} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + l\cos\beta + h\sin\alpha - l = 0 \\ h + l\sin\beta - h\cos\alpha = 0 \end{array} \right.$

Q3) On élimine β : $l^2 = (-l + x + h\sin\alpha)^2 + (h\cos\alpha - h)^2$

on développe : $\cancel{l^2} = \cancel{l^2} + x^2 + \underline{h^2\sin^2\alpha} - 2lx - 2lh\sin\alpha + 2xh\sin\alpha + \underline{h^2\cos^2\alpha} + h^2 - 2h^2\cos\alpha$

on obtient : $\underbrace{2(l-x)h}_{A(x)}\sin\alpha + \underbrace{2h^2}_{B}\cos\alpha = \underbrace{x^2 - 2lx + 2h^2}_{C(x)}$

Q4) $A(x)\sin\alpha + B\cos\alpha = \sqrt{A(x)^2 + B^2} \times \left[\dfrac{A(x)}{\sqrt{A(x)^2+B^2}}\sin\alpha + \dfrac{B}{\sqrt{A(x)^2+B^2}}\cos\alpha \right]$

or $\sin(\alpha + \varphi) = \cos\varphi\sin\alpha + \sin\varphi\cos\alpha$.

On identifie $\cos\varphi = \dfrac{A(x)}{\sqrt{A(x)^2+B^2}}$, ou $\sin\varphi = \dfrac{B}{\sqrt{A(x)^2+B^2}}$, ou mieux : $\boxed{\tan\varphi = \dfrac{B}{A(x)}}$

on obtient alors : $\boxed{\alpha = \arcsin\left(\dfrac{x^2 - 2lx + 2h^2}{2h\sqrt{(l-x)^2 + h^2}}\right) - \varphi}$

Q5) En linéarisant $D(x)$ sur $[0 \text{ - } 100\text{ mm}]$, on obtient :

$\boxed{D(x) = 600 - \frac{200}{100}x} = \underline{600 - 2x}$ avec D, x en mm

Q6) D doit varier de 600 à 400 mm en 4 s

donc x de 0 à 100 mm en 4 s.

Les vérins doivent donc avoir une vitesse de $\dfrac{100}{4} = \boxed{25\text{ mm/s.}}$

Q7) • 3/1 : translation selon $\vec{x_1}$: $\{\mathcal{V}_{3/1}\} = \left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ \dot{x}\,\vec{x_1}\end{matrix}\right\}_A$

• 4/3 : rotation d'axe $(A,\vec{z_1})$: $\{\mathcal{V}_{4/3}\} = \left\{\begin{matrix}\dot{\beta}\,\vec{z_1}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_A$

• 5/1 : rotation d'axe $(C,\vec{z_1})$: $\{\mathcal{V}_{5/1}\} = \left\{\begin{matrix}\dot{\alpha}\,\vec{z_1}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_C$

• 5/4 : rotation d'axe $(B,\vec{z_1})$: $\{\mathcal{V}_{5/4}\} = \left\{\begin{matrix}(\dot{\alpha}-\dot{\beta})\,\vec{z_1}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_B$ $\left(\vec{\Omega}_{5/4} = \vec{\Omega}_{5/1} - \vec{\Omega}_{4/1}\right)$

Q8) $\vec{V}_{A\in 3/1} = \dot{x}\,\vec{x_1}$

$\boxed{\vec{V}_{B\in 5/1} = \underbrace{\cancel{\vec{V}_{C\in 5/1}}}_{\vec{0}\ (\text{voir Q7})} + \vec{BC}\wedge\vec{\Omega}_{5/1} = -h\,\vec{y_5}\wedge\dot{\alpha}\,\vec{z_5} = -h\dot{\alpha}\,\vec{x_5}}$

Q9) $\vec{V}_{A\in 4/1} = \underbrace{\cancel{\vec{V}_{A\in 4/3}}}_{\vec{0}} + \vec{V}_{A\in 3/1} = \dot{x}\,\vec{x_1}$

$\boxed{\vec{V}_{B\in 4/1} = \vec{V}_{A\in 4/1} + \vec{BA}\wedge\vec{\Omega}_{4/1} = \dot{x}\,\vec{x_1} - l\,\vec{x_4}\wedge\dot{\beta}\,\vec{z_4} = \dot{x}\,\vec{x_1} + l\dot{\beta}\,\vec{y_4}}$

Q10) $\vec{V}_{B\in 5/1} = \underbrace{\cancel{\vec{V}_{B\in 5/4}}}_{\vec{0}} + \vec{V}_{B\in 4/1}$ donc $\boxed{-h\dot{\alpha}\,\vec{x_5} = \dot{x}\,\vec{x_1} + l\dot{\beta}\,\vec{y_4}}$

on projette sur $\vec{x_4}$ $\Rightarrow$ $\boxed{-h\dot{\alpha}\cos(\alpha-\beta) = \dot{x}\cos\beta}$

Q11) On néglige β $\Rightarrow$ $\cos(\alpha-\beta) \simeq \cos\alpha$ et $\cos\beta \simeq 1$

donc $\boxed{-h\,\dot{\alpha}\cos\alpha = \dot{x}}$

On intègre, avec comme condition initiale $\alpha = 0$ si $x = 0$

$\Rightarrow$ $-h\sin\alpha = x$ $\Rightarrow$ $\boxed{\alpha = -\arcsin\left(\frac{x}{h}\right)}$

Q12) L'approximation est valable sur la plage de fonctionnement, donc ce modèle simplifié est satisfaisant.

Rmq : On le retrouvait également en négligeant β en Q2 !