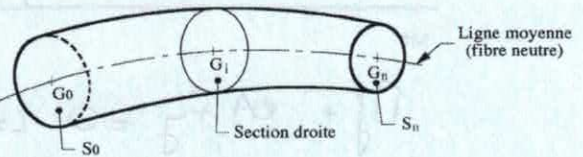


I – Cadre d'étude

Les matériaux étudiés sont des poutres (section négligeable devant la longueur) auxquelles on applique des actions mécaniques et/ou des déplacements (partie 3). L'objet de cette première partie est d'étudier l'équilibre de la poutre. La partie 2 consistera à tracer les diagrammes des efforts intérieurs.



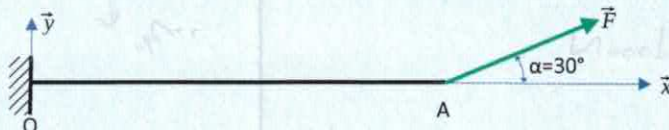
II – Modèle de liaisons

Trois liaisons sont définies, avec des symboles spécifiques. Une liaison permet des mobilités (mouvements) et par conséquent transmet des actions mécaniques aussi.

Encastrement	Articulation	Appui simple
Aucune mobilité possible	Rotation normale	Rotation normale et translation axiale
Actions mécaniques : N, T, M_f	Action mécanique : N, T	Action mécanique : T

III – Application du Principe Fondamental de la Statique « Graphique »

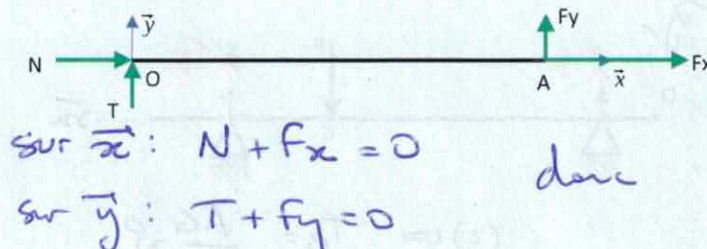
On considère cette poutre, soumise à un effort extérieur en A. On rajoute un repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.



$$\begin{aligned} OA &= 0,5 \text{ m} \\ \|\vec{F}\| &= 1000 \text{ N} \\ F_x &= F \cos(\alpha) \approx 866 \text{ N} \\ F_y &= F \sin(\alpha) = 500 \text{ N} \end{aligned}$$

1 – Equations des forces : Théorème de la Résultante Statique

On remplace la liaison en O par les forces qu'elle peut transmettre et on cherche l'équilibre sur $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

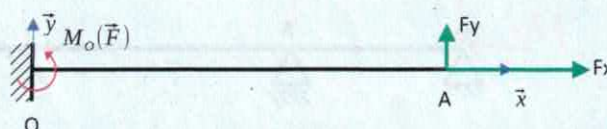


$$\begin{aligned} N &= -F_x \approx -866 \text{ N} \\ T &= -F_y = -500 \text{ N} \end{aligned}$$

Attention : la poutre n'est pas en équilibre ! Un moment la fait tourner autour de $(O, \vec{z})$.

2 – Calcul d'un moment, version « graphique »

La force en A exerce un moment en O. Uniquement sa composante normale à OA intervient, soit F_y . Un moment s'exprime en N.m (Newton-mètre), il faut donc rajouter le « bras de levier », soit la distance OA.

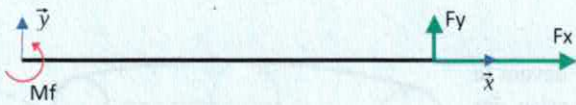


$$M_o(\vec{F}) = + OA \cdot F_y$$

Si l'on tient la pièce en O, ce moment a tendance à faire tourner la pièce dans le sens trigonométrique, le moment en O sera donc **positif**.

3 - Equations des moments : Théorème du Moment Statique en O

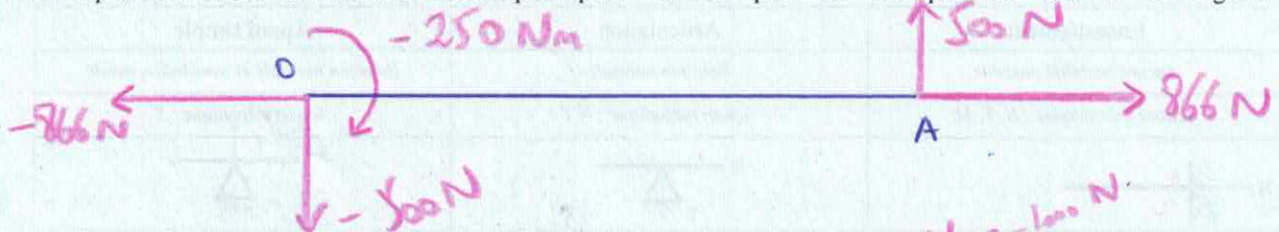
Un moment se calcule forcément en un point, donc il faut choisir un point d'application du TMS. Ici ce sera le point O. On n'oublie pas de rajouter les moments transmissibles par les liaisons, et de calculer les moments de toutes les forces extérieures ! On écrit l'équation des moments sur $\vec{z}$:



$$\sum \vec{M}_O = 0 \Rightarrow \boxed{\sum M_O = 0} \Rightarrow -0,5 \times 500 = -250 \text{ Nm}$$

4 - Bilan : représentation des actions mécaniques

On représente toutes les actions mécaniques pour vérifier que l'on n'a pas fait d'erreur de signe :

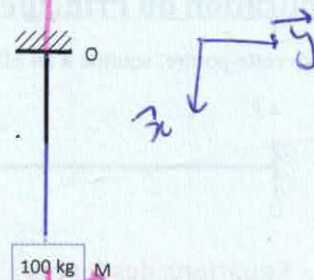


IV - Exercices

1°) Masse suspendue

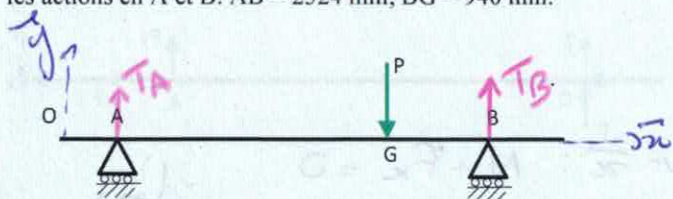
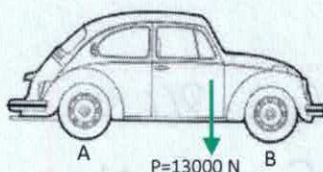
Trouver les actions en O :

$$\begin{aligned} N_O &= -P = -1000 \text{ N} \\ T_O &= 0 \\ M_O &= 0 \end{aligned}$$



2°) Voiture

On modélise la voiture comme une poutre. Trouver les actions en A et B. AB = 2524 mm, BG = 940 mm.



$$\text{Ici } N_A = N_B = 0$$

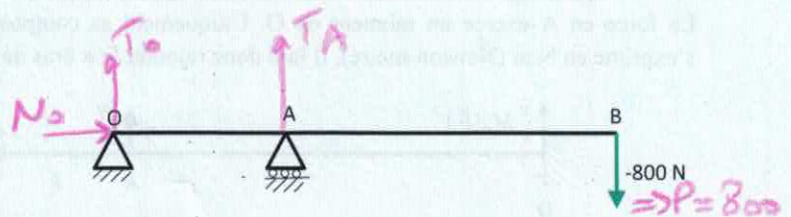
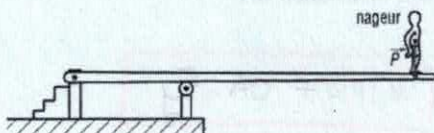
$$\text{TRS sur } \vec{y}: T_A + T_B - P = 0 \quad (1)$$

$$\text{TMS en A sur } \vec{z}: -AG \cdot P + AB \cdot T_B = 0 \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow T_B = \frac{AG}{AB} \cdot P$$

3°) Plongeur

Trouver les actions en O et A. OA = 0,5m, OB = 1,5m.



$$\text{TRS sur } \vec{x}: N_O = 0$$

$$\text{TRS sur } \vec{y}: T_O + T_A - 800 = 0$$

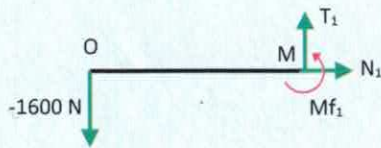
$$\text{TMS en O sur } \vec{z}: OA \cdot T_A - OB \cdot P = 0$$

$$T_O = 800 - T_A = -1600 \text{ N}$$

$$T_A = \frac{OB}{OA} \cdot P = \frac{1,5}{0,5} \times 800 = 2400 \text{ N}$$

4°) Exercice à méditer !

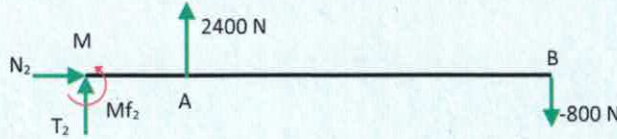
Pour la première partie, déterminer les actions N_1 , T_1 et Mf_1 . $OM = 0,25m$.



TRS sur $\vec{x}$: $N_1 = 0$
 sur $\vec{y}$: $T_1 - 1600 = 0$
 TMS en M sur $\vec{z}$: $Mf_1 + 1600 \times 0,25 = 0$

$N_1 = 0$
 $T_1 = 1600 \text{ N}$
 $Mf_1 = -1600 \times 0,25$
 $= -400 \text{ Nm}$

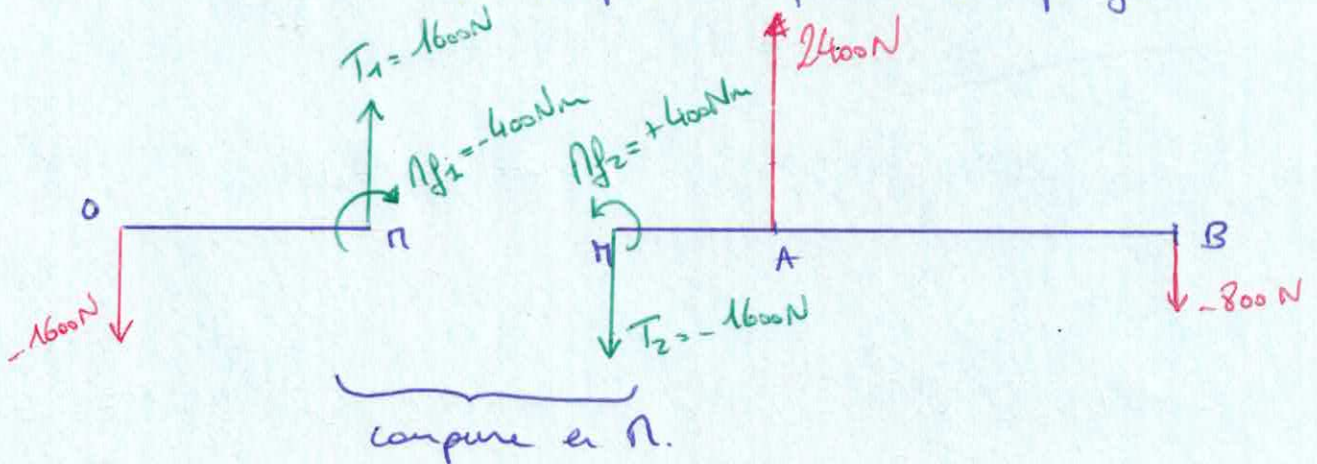
Dans la deuxième partie, trouver N_2 , T_2 et Mf_2 . $MA = 0,25m$, $MB = 1,25m$.



TRS sur $\vec{x}$: $N_2 = 0$
 sur $\vec{y}$: $T_2 + 2400 - 800 = 0$
 TMS en M sur $\vec{z}$: $2400 \times 1A - 800 \times 1B + Mf_2 = 0$

$N_2 = 0$
 $T_2 = -1600 \text{ N}$
 $Mf_2 = 800 \times 1,25 - 2400 \times 0,25$
 $= 400 \text{ Nm}$

Conclusion : Nous venons de couper le pontre du plongeur en deux !



- Les actions indexées 1 représentent les actions de la partie droite sur gauche
 " " 2 " " " " gauche sur droite

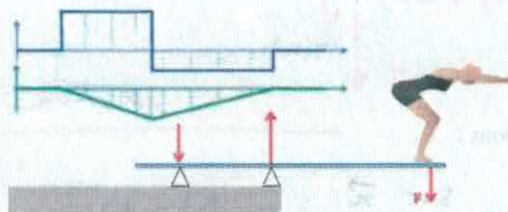
- On vient de montrer le principe des actions réciproques :

$$F_{\text{gauche/droite}} = -F_{\text{droite/gauche}}$$

$$M_{\text{gauche/droite}} = -M_{\text{droite/gauche}}$$

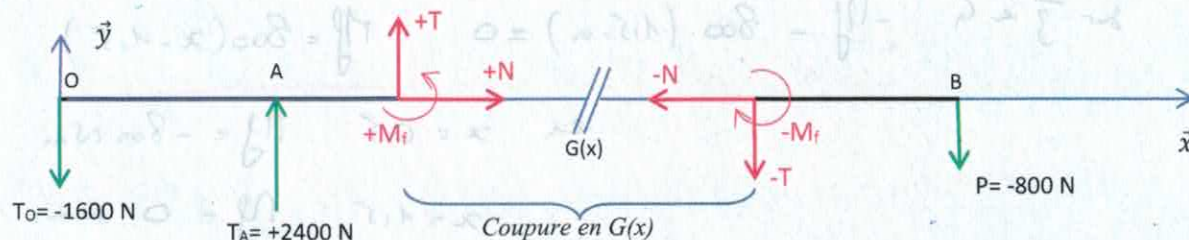
I – Cadre d'étude

L'objet de cette deuxième partie est d'étudier l'évolution des efforts intérieurs (N, T, M_f) le long de la poutre du plongeur.



II – Applications des efforts intérieurs

Dans le plan ($\vec{x}$, $\vec{y}$), les efforts intérieurs transmissibles sont l'effort normal N, l'effort tranchant T, et le moment fléchissant M_f. On coupe la poutre à la distance x de l'origine, au point G(x). Les efforts intérieurs s'appliquent en positif sur la partie gauche de la poutre (avant coupure), et en négatif sur la partie droite.



- Remarques :**
- On devrait parler d'actions mécaniques intérieures au lieu d'efforts intérieurs.
 - Nous pouvons déterminer les efforts intérieurs soit en isolant la partie gauche de la courbe, soit la partie droite : attention aux signes !
 - Il faut couper entre chaque point d'application d'action mécanique extérieure : ici entre O et A, puis entre A et B.

III – Coupure entre O et A

Partie gauche	Partie droite

La partie qui contient le moins d'efforts extérieurs est celui de la partie gauche. Nous allons donc procéder à son isolement.

$$\text{sur } \vec{y} : T_0 + T = 0 \Rightarrow T = -T_0 = +1600 \text{ N}$$

$$\text{sur } \vec{x} : N = 0$$

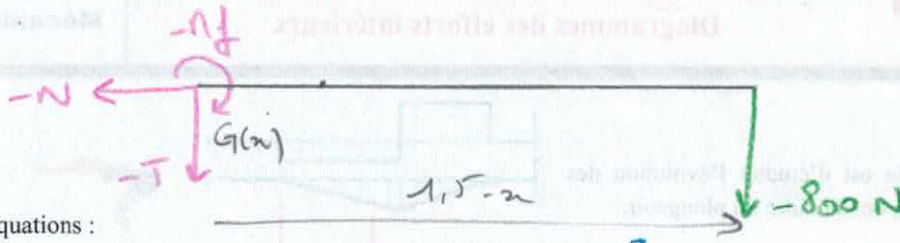
$$\text{sur } \vec{y} \wedge G : M_f + |T_0| \cdot x = 0 \Rightarrow M_f = -|T_0| \cdot x = -1600 \cdot x$$

$$x = 0 : M_f = 0 \text{ Nm}$$

$$x = 0,5 : M_f = -800 \text{ Nm}$$

III - Coupure entre A et B

Dessin :



Equations :

$$\text{sur } \vec{x} : -N = 0$$

$$\text{sur } \vec{y} : -T - 800 = 0$$

$$\text{sur } \vec{z} : -M_f - 800 \cdot (1.5 - x) = 0$$

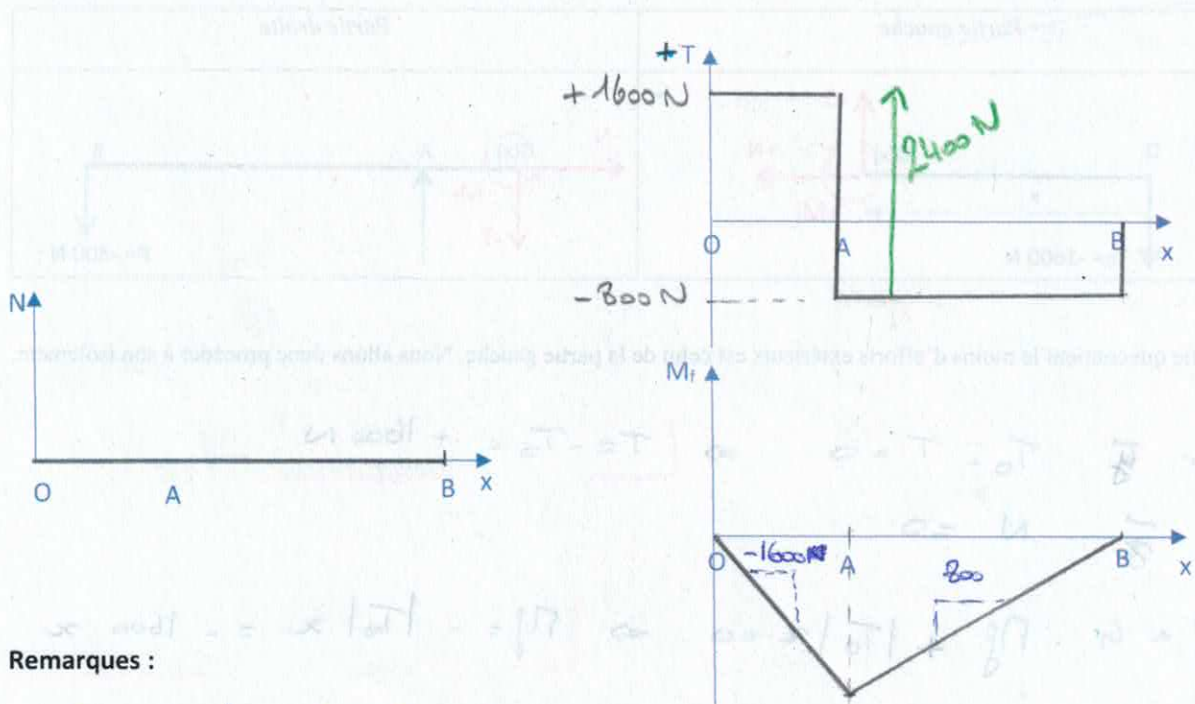
$$T = -800 \text{ N}$$

$$M_f = 800(x - 1.5)$$

$$\text{en } x = 0.5 \quad M_f = -800 \text{ Nm}$$

$$x = 1.5 \quad M_f = 0 \text{ Nm}$$

Diagrammes des efforts intérieurs :



Remarques :

- L'ajout (à A) d'un effort tranchant crée une discontinuité de T
- M_f ne sera discontinu que si l'on ajoute un moment ponctuel (rare)
- on observe que $T = - \frac{dM_f}{dx}$

Ex1 :

□ Le pont roulant propose se compose d'une poutre principale (profilé IPE), d'un palan mobile entre A et B soulevant une charge de poids $\vec{P}$ ($P = 2\,000\text{ daN}$). La poutre principale est schématisée comme l'indique la figure, si $a = 2\,500$ et $b = 3\,000$.

- Déterminer les actions exercées par les appuis en A et B.
- Tracer les diagrammes des efforts tranchants T et des moments fléchissants M_f entre A et B.

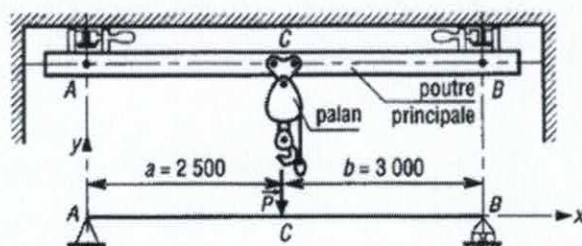


Fig. 24

Ex2 :

□ Un arbre d'essieu de wagon supporte deux charges $\vec{P}$, symétriquement en A et D, exercées par les paliers à roulement.

- Déterminer les actions exercées par les roues (appuis B et C). $P = 6\,250\text{ daN}$.
- Tracer les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchis entre A et D.

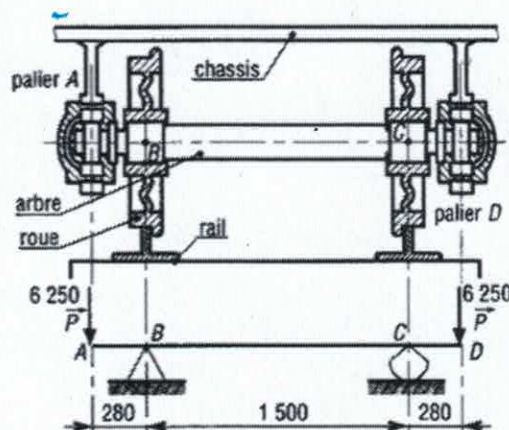


Fig. 26

Réponse
 flexion pure entre B et C ; $B_y = C_y = 6\,250\text{ daN}$;
 $T_{\max} = 6\,250\text{ daN}$; $M_{f\max} = 17,5\text{ kNm}$.

Ex3 :

□ Pour régler la circulation automobile à un carrefour, on utilise une rampe BCD équipée de deux feux tricolores de poids $P = 200\text{ N}$. La rampe est encastree (soudée) en B sur un tube AB. Le poids du profilé BCD étant négligé.

- Déterminer les actions exercées par l'encastrement B.
- Déterminer les diagrammes des T et des M_f entre D et B.

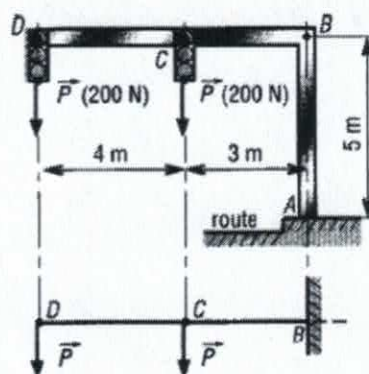
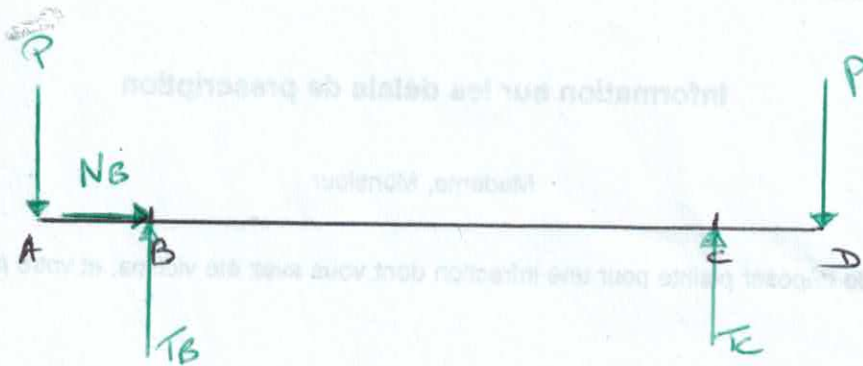


Fig. 34

Ex 2:



a) on cherche N_B , T_B et T_C .

TRS sur $\vec{x}$: $N_B = 0$

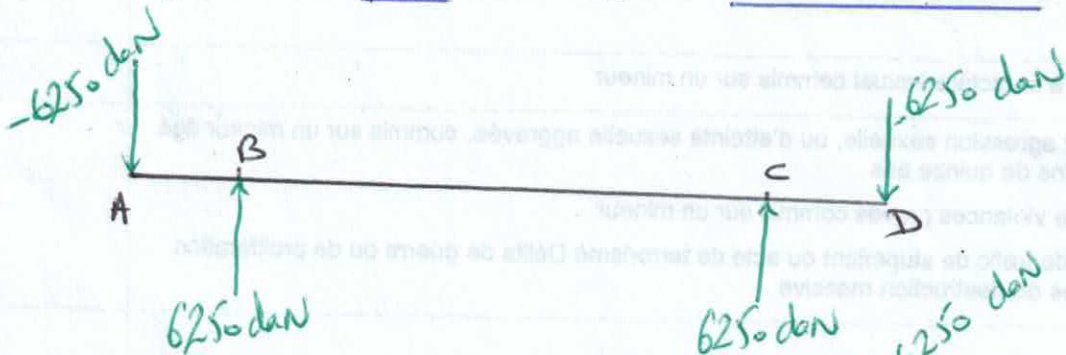
sur $\vec{y}$: $-P + T_B + T_C - P = 0 \quad (1)$

TNS en B sur $\vec{z}$: $P \cdot AB + T_C \cdot BC - P \cdot BD = 0$

$\Rightarrow T_C = \frac{P \cdot BD - P \cdot AB}{BC} = P = \underline{6250 \text{ daN}}$

et d'après (1): $T_B = 2P - T_C = P = 6250 \text{ daN}$

Bilan:

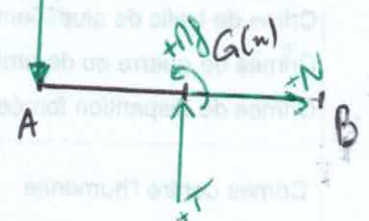


b) On coupe entre A et B:

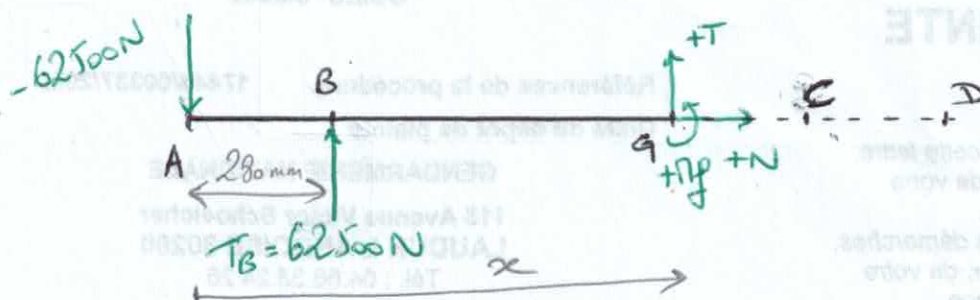
TRS sur $\vec{x}$: $N = 0$

sur $\vec{y}$: $T - 6250 = 0 \Rightarrow T = 6250 \text{ daN}$

TNS en G sur $\vec{z}$: $+M_G + 6250 \times AG = 0 \Rightarrow M_G = -6250 \cdot x \text{ [daN.m]}$
 $= -6250x \text{ [N.m]}$



On coupe entre B et C Δx part toujours de A.



TRS sur $\vec{x}$: $N = 0 \text{ N}$

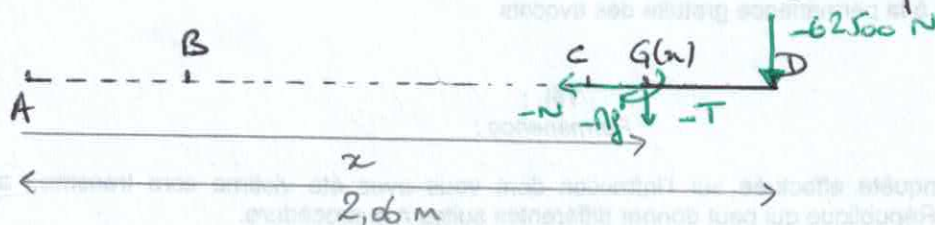
sur $\vec{y}$: $-P + T_B + T = 0 \Rightarrow T = P - T_B = 0 \text{ N}$

TMS en G sur $\vec{z}$: $+M_g + P \cdot AG - T_B \cdot BG = 0$

$\Rightarrow M_g + P \cdot x - T_B \cdot (x - 0,28) = 0$
en mètres

$\Rightarrow M_g = -P \cdot x + T_B (x - 0,28)$ avec $T_B = P$
 $= -P \cdot x + P \cdot x - T_B \cdot 0,28$
 $= -62500 \times 0,28 = -17500 \text{ Nm}$

On coupe entre C et D • on isole la partie droite
 Δx part toujours de A



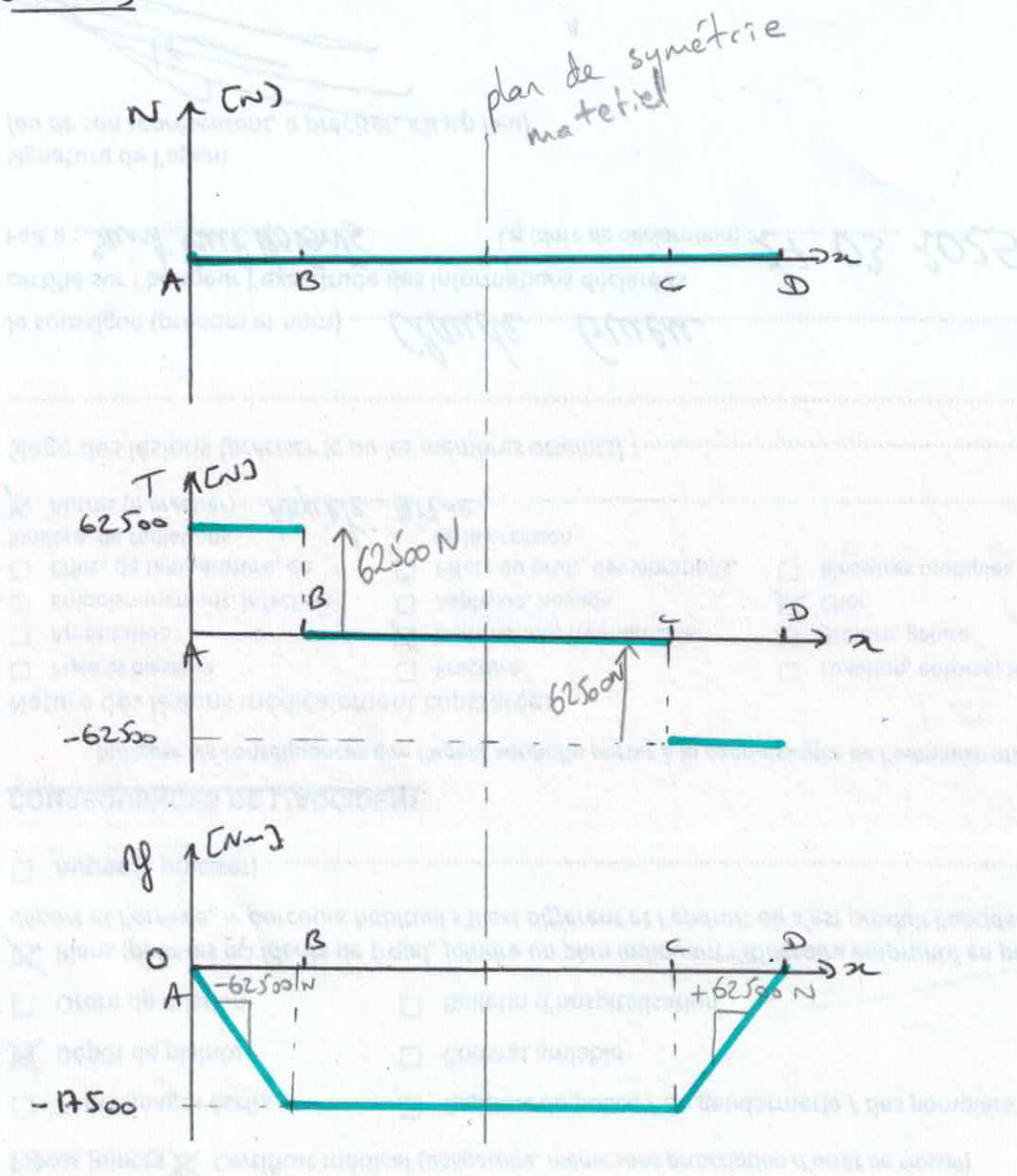
TRS sur $\vec{x}$: $-N = 0 \Rightarrow N = 0 \text{ N}$

sur $\vec{y}$: $-T - 62500 = 0 \Rightarrow T = -62500 \text{ N}$

TMS en G sur $\vec{z}$: $-M_g - 62500 \times (2,06 - x) = 0 \Rightarrow M_g = -62500(2,06 - x)$

Diagrammes

(3)



- Remarques :
- On peut vérifier :
 - * les sauts sur T qui correspondent à T_B et T_C
 - * la pente de M_f qui vaut $-T(x)$
 - La poutre a une symétrie géométrique et de chargement par rapport au plan médian, donc on retrouve une symétrie sur les diagrammes aussi.
 - La sollicitation entre B et C ($T=0$ et $M_f \neq 0$) est une flexion pure.
 - Les sollicitations sur AB et CD sont de la flexion simple ($T \neq 0$ et $M_f \neq 0$)