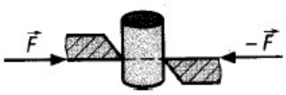
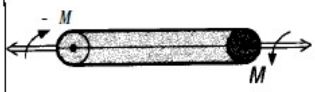
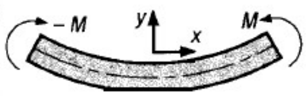
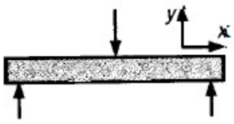
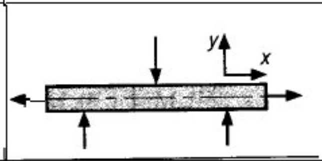
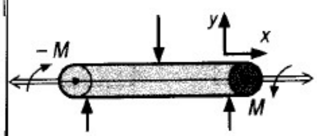
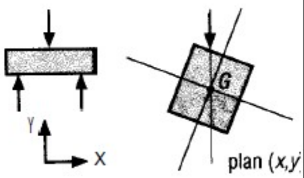
I – Sollicitations simples et composées

Cas	Exemple	Composantes N	Composantes T	Composantes M_T	Composantes M_f	Observations
traction		N	0	0	0	Sollicitations simples
cisaillement		0	T	0	0	Sollicitations simples
torsion		0	0	M_T	0	Sollicitations simples
flexion pure		0	0	0	M_{fz}	Sollicitations simples
flexion simple		0	T_y	0	M_{fz}	Sollicitations composées
flexion + traction		N	T_y	0	M_{fz}	Sollicitations composées
flexion + torsion		0	T_y	M_T	M_{fz}	Sollicitations composées
flambage		N	0	0	M_{fz}	Sollicitations composées
flexion déviée		0	T_y / T_z	0	M_{fz} / M_{fy}	Sollicitations composées

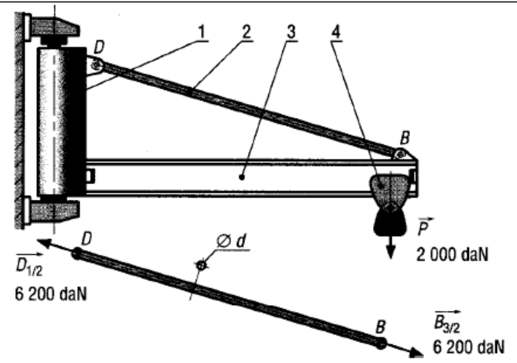
II – Traction

1°) Définition – Exemple

Une poutre droite est sollicitée en traction chaque fois que les actions aux extrémités (A et B) se réduisent à deux forces égales et opposées ($\vec{F}$ et $-\vec{F}$) de direction la ligne moyenne (L_m).

Fig. 1

Exemple



ig. 2

La potence à tirant proposée est utilisée en manutention pour lever et déplacer des charges. Elle se compose d'un palan 4, d'une poutre-rail 3, d'un fût pivotant 1 et du tirant 2.
Le tirant 2 est soumis à une sollicitation de traction : il est soumis à l'action de deux forces D1/2 et B3/2, égales et opposées, direction BD, intensité maximale 6 200 daN (cas où le palan 4 est à l'extrême droite).
Le tirant est cylindrique, de diamètre d inconnu, de longueur 2,8 m, et est réalisé en acier (résistance à la rupture R = 500 MPa, limite élastique R, = 300 MPa). Le diamètre d sera déterminé dans les paragraphes suivants.

2°) Effort Normal N

Faisons une coupure fictive de la poutre (section droite S située à x de *A)* entre les deux extrémités *A* et B pour faire apparaître les efforts intérieurs dans la poutre. La coupure S divise la poutre en deux tronçons AG et GB. Quelle que soit la position de la coupure (ou de la valeur de x), chaque tronçon est soumis à deux forces égales et opposées.

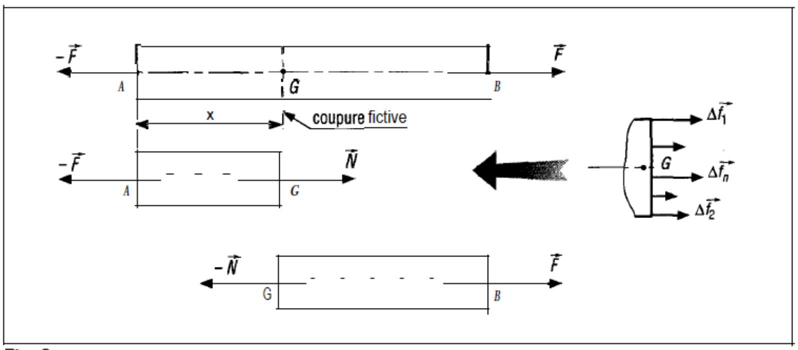


Fig. 3

En effet, si on isole le tronçon AG, la résultante des actions $\overrightarrow{\Delta f_1}, \overrightarrow{\Delta f_2}, \dots, \overrightarrow{\Delta f_n}$ exercées en chaque point de la coupure par le tronçon GB se réduit au seul effort normal $\vec{N}$ en G (centre de gravité ou barycentre de la coupure S), tel que :

$$\vec{N} = \overrightarrow{\Delta f_1} + \overrightarrow{\Delta f_2} + \dots + \overrightarrow{\Delta f_n} = \vec{F} \text{ (direction AGB)}$$

$$\boxed{N = F} \quad \text{(quel que soit x)}$$

Exemple du tirant

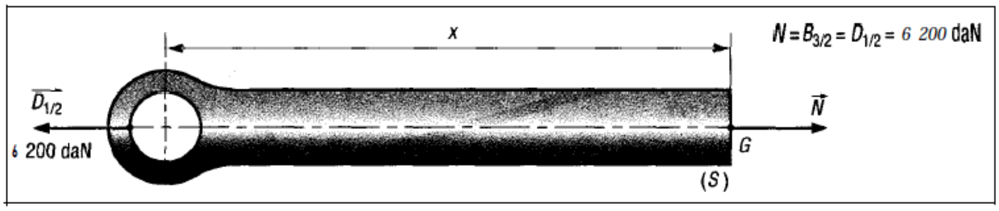


Fig. 4

3°) Contrainte normale uniforme σ

On dit qu'il y a répartition uniforme des contraintes dans la coupure ou section droite S. Il en résulte que :

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{S}}$$

σ : contrainte normale en MPa ou $N.mm^{-2}$
N : effort normal en N
S : aire de la section droite en mm^2

Exemple : reprenons l'exemple du tirant en supposant d = 20 mm.

$S = \frac{\pi\, 20^2}{4} = 314\ mm^2$ $\qquad \sigma = 197\ N.mm^{-2} = 197$ MPa

$\sigma = \frac{N}{S} = \frac{6\,200}{314} = 19{,}7\ daN.mm^{-2}$ $\qquad \sigma = \frac{N}{S} = \frac{4N}{\pi d^2}$

Fig. 6

4°) Conditions de résistance

Pour des questions de sécurité liées à l'usage de l'appareil, la contrainte σ précédente doit rester inférieure à une contrainte limite admissible, appelée résistance pratique à l'extension R,,. Il en sera ainsi pour toutes les constructions de ce type.
La résistance pratique R_{pe} est fixée par des normes ou par le constructeur. Dans le cas général, R_{pe} est définie à partir de la limite élastique R_e du matériau. R_e est une donnée (voir essai de traction).

$$\boxed{\sigma_{maxi} = \frac{N}{S} \leqslant R_{pe} = \frac{R_e}{s}}$$

s est le coefficient de sécurité adopté pour la construction de l'appareil. Sauf pour les cas où la rupture est recherchée, le coefficient de sécurité est choisi de façon à ce qu'en cours de fonctionnement normal, les contraintes normales maximales ne dépassent pas la limite élastique R_e du matériau.

Remarque : dans certains cas (matériaux fragiles, etc.), on préfère utiliser la résistance à la rupture R_r du matériau, à la place de R_e, pour définir **s** (voir chapitre « résistance des matériaux - généralités »).

Exemple : reprenons l'exemple du tirant ; si on impose une contrainte admissible de 100 MPa, déterminons le diamètre d minimal pour la construction de celui-ci et les coefficients de sécurité adoptés. Rappel : N = 62 000 N.

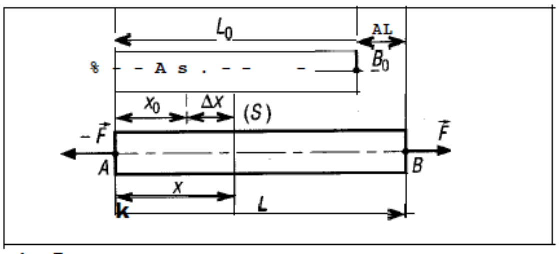
a) $\sigma_{maxi} = \frac{N}{S} = \frac{62\,000}{\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)} \leqslant 100$ d'où $\frac{62\,000 \times 4}{100\pi} \leqslant d^2$

après calcul : d ⩾ 28,1 mm.

5°) Déformations

1. Allongements

L_0 = longueur initiale de la poutre
L = longueur finale de la poutre
ΔL = allongement total de la poutre
X_0 = longueur initiale du tronçon
X = longueur finale du tronçon
ΔX = allongement du tronçon



ig. 7

L'expérimentation montre que les allongements sont proportionnels aux longueurs initiales. L'allongement relatif ε traduit cette propriété :

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{\Delta X}{X_0} = \text{allongement relatif (sans unité)} \quad \text{où} \quad \Delta L = \varepsilon L_0$$

Remarques : ε caractérise l'allongement d'une poutre de longueur 1 (égale à l'unité). ε ne doit pas être confondu avec A % (voir paragraphe VI).

Exemple : sous charge, le tirant des exemples précédents s'allonge de 4 mm. Déterminons ε et l'allongement d'un tronçon de longueur 1 m.

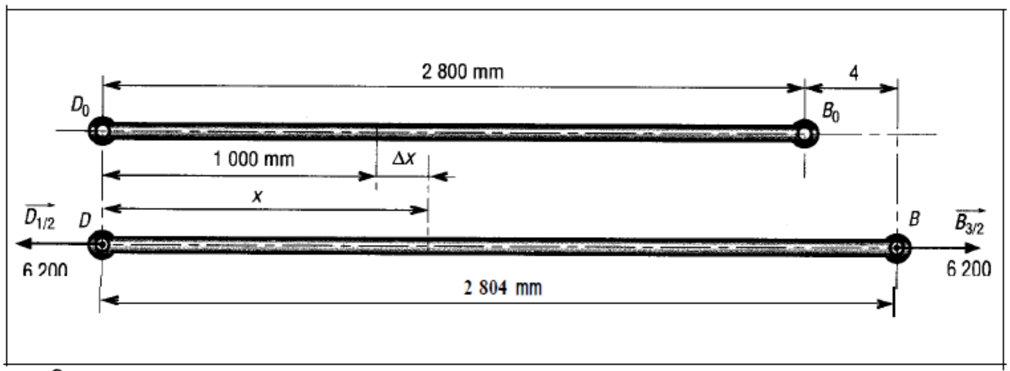


Fig. 8

$$\varepsilon = \frac{4}{2\,800} = \frac{1}{700} = 0{,}00143$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta X}{1\,000} = 0{,}00143 \quad \text{d'où} \quad \Delta X = 0{,}00143 \times 1\,000 = 1{,}43\,\text{mm}$$

$$X = 1\,001{,}43\,\text{m}$$

6°) Loi de Hooke – Relation contraintes/déformations

En déformation élastique, la contrainte normale σ est proportionnelle à l'allongement relatif ε

$$\sigma = E\varepsilon$$

σ : contrainte normale MPa ou $N.mm^{-2}$
ε : allongement relatif (sans unité)
E : module d'élasticité longitudinale MPa

Exemple
Reprenons l'exemple du tirant : d=28mm, σ=lOOMPa, E = 200 GPa, L = 2,8 m

Déterminons l'allongement ΔL du tirant :

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma}{E} = \frac{100}{200\,000} = 0{,}0005$$

$$\Delta L = \varepsilon L = 0{,}0005 \times 2\,800 = 1{,}4 \text{ mm}$$

7°) Essai de traction

b) Courbes contraintes - déformations

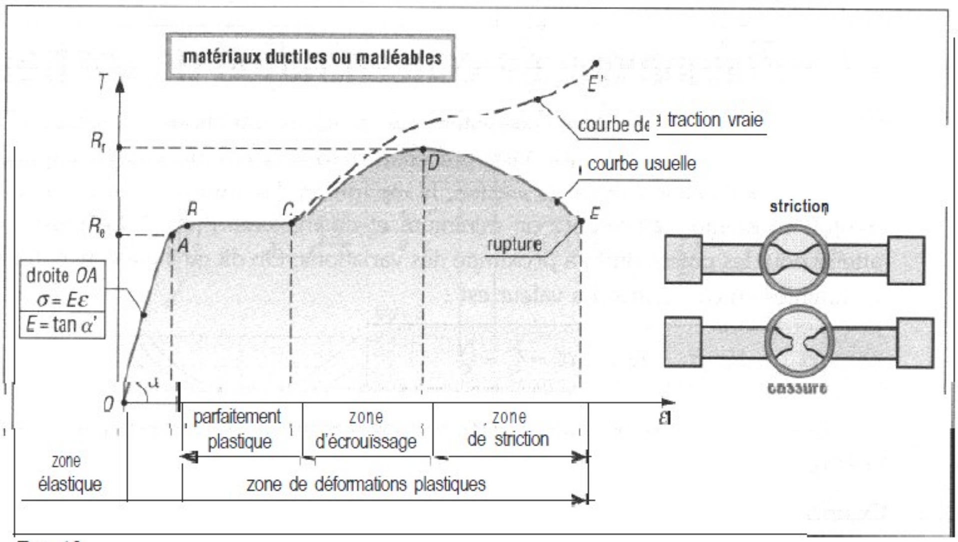


Fig. 13

Les courbes obtenues par essai varient d'un matériau à l'autre. Cependant, un grand nombre de matériaux (métaux, etc.) se comportent comme les graphes des figures 13 et 14, avec une zone de déformation élastique (OA) et une zone de déformation plastique.

Zone élastique OA : dans cette zone, l'éprouvette se comporte élastiquement comme un ressort et revient toujours à sa longueur initiale dès que la charge est relâchée. Le point A, auquel correspond la limite élastique R_e, marque la fin de la zone. La proportionnalité entre contrainte σ et allongement ε est traduit par la loi de Hooke (voir paragraphe 1). E = tan a' caractérise la pente de la droite OA et $\sigma = E\varepsilon$ son équation.

Zone de déformation plastique AE : dans le cas des matériaux ductiles, on distingue trois zones BC, CD et DE (ductilité : aptitude à se déformer plastiquement).
Dans la zone BC, parfaitement plastique, la contrainte reste constante et l'allongement se poursuit jusqu'en C. Entre C et D, zone d'écrouissage, le matériau subit un changement de structure qui accroît sa résistance. Le point D, auquel correspond la résistance à la rupture R_r marque la fin de la zone.
Entre D et E, l'éprouvette subit une striction amenant une diminution de la section avec étranglement. La rupture se produit en E.

Remarque : dans le cas des matériaux fragiles (fig. **14**), il n'y a ni zone parfaitement plastique BC, ni zone de striction DE. De plus, pour ces matériaux, A % et Z % sont beaucoup plus petits.

La courbe de traction vraie (fig. **13**) 0, A, B, C, E' prend en compte la section réelle S de l'éprouvette, à la place de la section initiale S_0 pour la courbe usuelle.

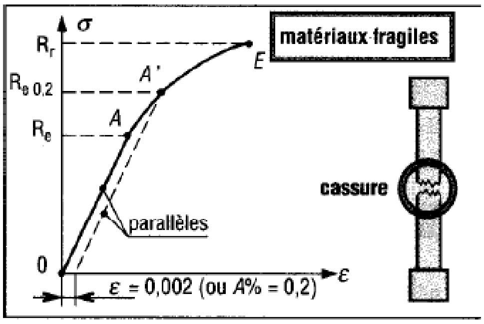


Fig. 14

Dans certains cas, lorsque R_e est difficile à définir, on utilise $R_{e0,2}$ pour le remplacer. Lorsque $\sigma = R_{e0,2}$, l'éprouvette s'est allongée de 0,2 % (**fig. 14**).

III – Torsion

1°) Définition – exemple

Une poutre droite est sollicitée en torsion chaque fois que les actions aux extrémités (A et B) se réduisent à deux couples M et – M égaux et opposes d'axe la ligne moyenne L_m.

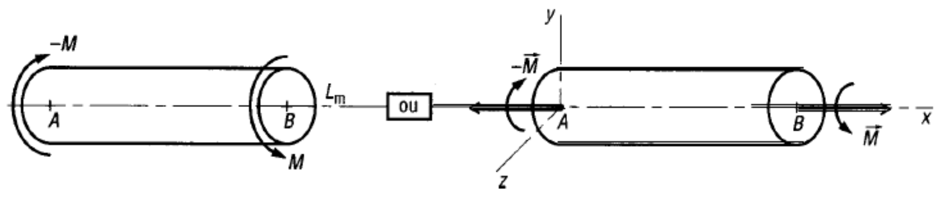


Fig. 1

Exemple : tige de tournevis.

Le tronçon AB de la tige du tournevis proposé (longueur 200 mm, diamètre 7 mm) est soumis à une sollicitation de torsion. Le couple de torsion supporté par la tige est :

$M_B = -M_A = F\,.\,a = 24$ Nm

Quelles sont les contraintes exercées et les déformations correspondantes ? C'est ce que nous allons découvrir dans les paragraphes suivants.

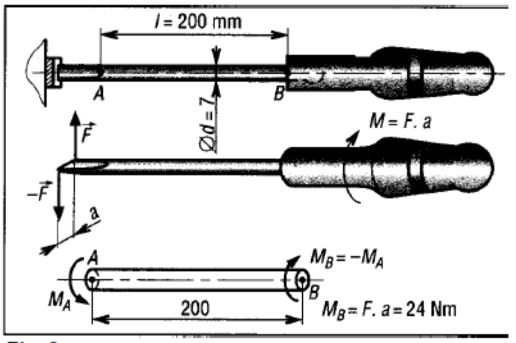


Fig. 2

2°) Déformation – angle unitaire de torsion

Si on suppose que les sections droites tournent toutes entre elles de la même façon, alors l'angle de torsion entre deux sections droites quelconques est proportionnel à la distance entre celles-ci.

α : angle de torsion de la poutre

Autrement dit :

$$\frac{\alpha}{L} = \frac{\alpha_X}{X} = \theta = \text{angle unitaire de torsion}$$

Exemple : reprenons l'exemple du tournevis avec $M = 24$ Nm, si l'angle de torsion a,, mesuré entre **A** et B est égal à $14{,}6°$; déterminons θ.

$$\theta = \frac{\alpha_{AB}}{L_{AB}} = \frac{14{,}6°}{200} = 0{,}073°.\ mm^{-1}$$

$$= 73°.\ m^{-1} = \frac{73 \times \pi}{180} = 1{,}274\ rad.m^{-1}$$

3°) Efforts intérieurs – moment de torsion Mt

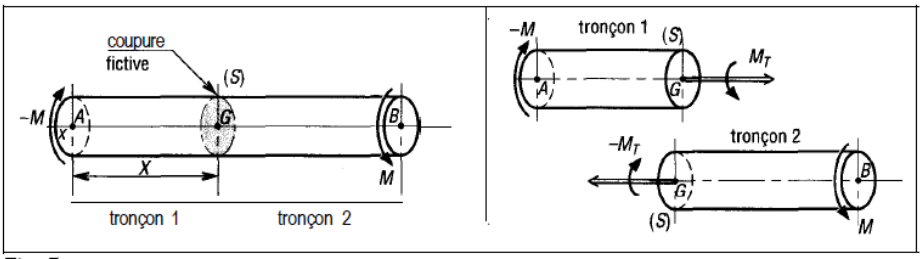


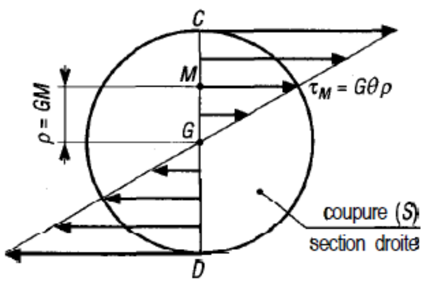
Fig. 5

L'étude de l'équilibre de l'un ou l'autre tronçon (avec la convention des efforts à droite) montre que les actions de cohésion se réduisent à un couple de torsion M_T, d'axe la ligne moyenne (x), tel que : $\boxed{M_T = M}$

4°) Contraintes tangentielles de torsion τ

En torsion, et dans le cas des petites déformations, les contraintes normales σ sont négligeables. Les contraintes dans la coupure (S) se réduisent à des contraintes tangentielles ou de cisaillement τ.

On montre que la contrainte τ_M en un point M quelconque de la coupure (S) est proportionnelle à la distance $GM = \rho$ entre le point et la ligne moyenne.



$$\boxed{\tau = G\,\theta\,\rho}$$

- τ : contrainte ($N.mm^{-2}$ ou MPa)
- θ : angle unitaire de torsion ($rad.mm^{-1}$)
- ρ : rayon GM (mm)
- G : module d'élasticité transversal ($N.mm^{-2}$ ou MPa)

Fig. 6

Remarques : tous les points situés sur un même cercle de centre G et de rayon ρ ont même contrainte. Les contraintes sont maximales à la périphérie : $\tau_{maxi} = G\theta R$ pour $\rho_{maxi} = R$. Pour les métaux : G $\simeq 0{,}4$ E.

Exemple : cas de la tige de tournevis, G = 80 GPa ; $\theta = 73°.m^{-1}$. Déterminons la contrainte de cisaillement maximale dans la tige.

Diamètre de la tige : d = 7 mm d'où $\rho_{maxi} = d/2 = 3{,}5$ mm

$$\theta = 73°.m^{-1} = \frac{73 \times \pi}{180} = 1{,}27 \text{ rad.m}^{-1} = 0{,}001\ 27 \text{ rad.mm}^{-1}$$

Contrainte : $\tau_{maxi} = G\theta\rho_{maxi} = 80\ 000 \times 0{,}001\ 27 \times 3{,}5 = 356$ $N.mm^{-2}$

5°) Relation entre Mt et θ

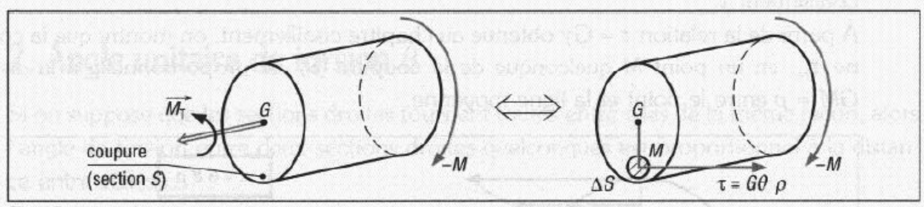


Fig. 8

En chaque point M de la coupure s'exerce, pour l'élément de surface ΔS autour de M, une force Δf = τ. ΔS dont la direction est perpendiculaire a GM. Le moment de torsion M_T est égal au moment résultant en G de toutes les forces Δf de la section (S).

$$M_T = \sum_{(s)} M_G(\overrightarrow{\Delta f}) = \sum_{(s)} \Delta f.\rho = \sum_{(s)} \tau.\rho\Delta S = \sum_{(s)} G\theta\rho^2\Delta S$$
$$= G\theta \sum_{(s)} \rho^2\Delta S = G\theta\int_{(s)} \rho^2 dS = G\theta I_0$$

Le terme $\sum_{(s)} \rho^2\Delta S = \int_{(s)} \rho^2 dS = I_0$ est le moment quadratique de la section (S) par rapport au point G (voir chapitre « moment quadratique » en fin d'ouvrage).

Cas particuliers à retenir :

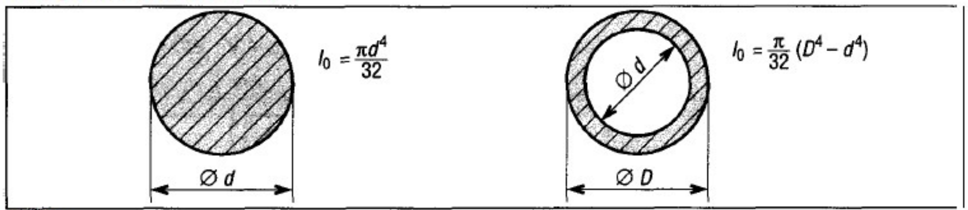


Fig. 9

$$M_T = G\theta I_0$$

t o r s

L'angle unitaire de torsion θ est proportionnel au moment de o n M_T

M_T : moment de torsion (Nmm)

G : module d'élasticité transversal (N.mm^{-2} ou MPa)

θ : angle unitaire de torsion (rad.mm^{-1})

I_0 : moment quadratique par rapport au point G (mm^4)

Exemple : reprenons l'exemple du tournevis avec M_T = 24 Nm, d = 7 mm, G = 80 GPa, et déterminons l'angle unitaire de torsion.

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi 7^4}{32} = 235{,}7\,\text{mm}^4$$

$$\theta = \frac{M_t}{G I_0} = \frac{24.10^3}{80\,000 \times 235{,}7} = 0{,}00127\,\text{rad.mm}^{-1}\ (72{,}8°\,.\,\text{m}^{-1})$$

6°) Relation en τ et Mt

À partir de $\tau = G\theta\rho$ et $M_T = G\theta\, I_0$, on peut écrire : $G\theta = \frac{\tau}{\rho} = \frac{M_T}{I_0}$

On obtient ainsi :

$$\boxed{\tau = \frac{M_T}{I_0} \times \rho}$$

τ : N.mm^{-2}
Mt : N.mm
ρ : mm
I_0 : mm^4

Exemple : cas du tournevis, M_T = 24 Nm, d = 7 mm, la contrainte maximale est :

I_0 = 235,7 mm^4 et $\tau = \frac{24\ 000}{235{,}7} \times \rho = 102\ \rho$ N.mm^{-2}

$\tau_{maxi} = 102\ \rho_{maxi} = 102 \times 3{,}5 = 356$ N.mm^{-2}

7°) Calcul des constructions

Sauf pour les cas où la rupture est recherchée, la contrainte tangentielle maximale τ_{maxi} doit toujours rester inférieure à la résistance pratique au glissement ou au cisaillement Rpg du matériau.

Exemple : si, pour le tournevis précédent, on impose une contrainte admissible au cisaillement de 200 MPa, déterminons la valeur minimale du diamètre d lorsque $M_{T\ maxi}$ = 24Nm.

$$\tau_{maxi} = \frac{24\,000}{\left(\frac{I_0}{V}\right)} = \frac{24\,000}{\left(\frac{\pi d^3}{16}\right)} \leqslant R_{pg} = 200\,\text{N.mm}^{-2}$$

$$d^3 \geqslant \frac{24\,000 \times 16}{\pi \times 200} \quad \text{e t} \quad d \geqslant 8{,}5\,\text{mm}$$

8°) Exercices

❑ L'arbre proposé transmet un couple de 3 000 Nm. Si on impose un angle de torsion a = 1,8° entre les deux extrémités, A et B distantes de 0,8 m ; <u>déterminer</u> le diamètre d (G = 75 GPa).

Réponse

d = 69,5 *mm*.

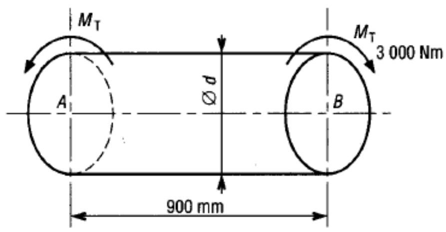


Fig. 26

4 Déterminer la puissance transmise et la contrainte de cisaillement maximale dans l'arbre si le diamètre d'enroulement de la courroie sur la poulie est de 100 mm et si T_1 = 1 000 N et T_2 = 400 N sont les tensions respectives des deux brins de celle-ci.
N_{arbre} = 1 000 tr.min^{-1}.

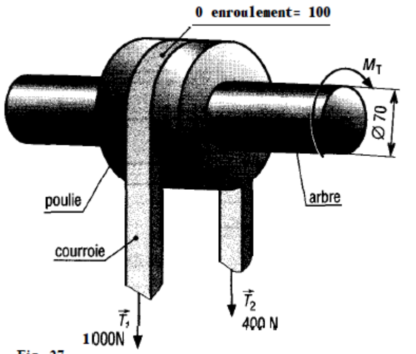


Fig. 27

5 L'arbre plein, de diamètre d et de longueur 2 m, relie un moteur à un récepteur par l'intermédiaire de deux accouplements. La puissance transmise est de 20 kW à 1 500 tr.min^{-1}. Si on impose une contrainte de cisaillement admissible de 80 MPa pour le matériau de l'arbre, déterminer le diamètre d nécessaire.

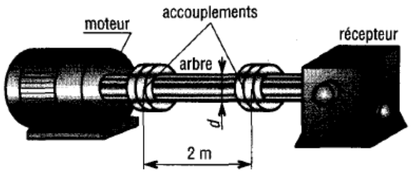


Fig. 28

9 Un arbre de transmission distribue la puissance entre trois roues dentées A, B et C. Si les couples respectifs sont C_A = 500 Nm, C_B = − 1500 Nm et C_C = 1 000 Nm, déterminer les contraintes de cisaillement maximales dans les tronçons **AB** et BC.

Réponse

τ_{AB} = 94.3 MPa ; τ_{BC} = 79.6 MPa

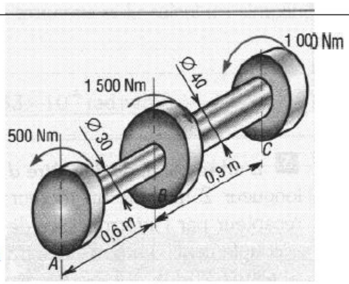


Fig. 31

11 L'arbre proposé distribue la puissance entre quatre roues dentées A, B, C et D. Les couples transmis sont C_A = 600 Nm, C_B = − 1 400 Nm, C_C = 266 Nm et C_D = 534 Nm. Si la contrainte de cisaillement admissible est de 50 MPa, déterminer d_1, d_2 et d_3.

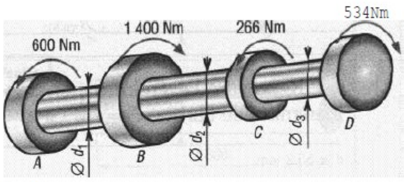


Fig. 32