

Étude d'un vélo cargo Douze G4e

Corrigé UPSTI

II - Effort de mise en stationnement

Objectif : Déterminer l'effort à exercer par l'usager lors de la mise en stationnement sur béquille

II.1 - Caractéristique inertielle du vélo

II.1.a - Centre de gravité G_v du vélo à vide

Question 1 Déterminer l'expression littérale de la position x_g suivant \vec{x} du centre de gravité de l'ensemble.

En déduire la valeur de x_g en mm (on arrondira le résultat à la dizaine de mm).

On isole le vélo. En utilisant le Principe Fondamental de la Statique (PFS) en moment au point I sur \vec{z} , on obtient :

$$-m_v x_g + m_j L = 0 \Leftrightarrow m_v x_g = m_j L \Leftrightarrow x_g = \frac{m_j}{m_v} L .$$

On pouvait tout aussi bien utiliser le PFS en moment au point G sur \vec{z} et obtenir :

$$m_l x_g = m_j (L - x_g) \Leftrightarrow (m_l + m_j) x_g = m_j L \Leftrightarrow x_g = \left(\frac{m_j}{m_l + m_j} \right) L .$$

$$\text{A.N. } x_g = \left(\frac{23}{26+23} \right) 2050 \Leftrightarrow x_g \blacksquare 960 \text{ mm} .$$

Question 2 Déterminer l'expression littérale de la position x_T suivant \vec{x} du centre de gravité de l'ensemble chargé. Calculer la valeur, arrondie à la dizaine de mm, de x_T .

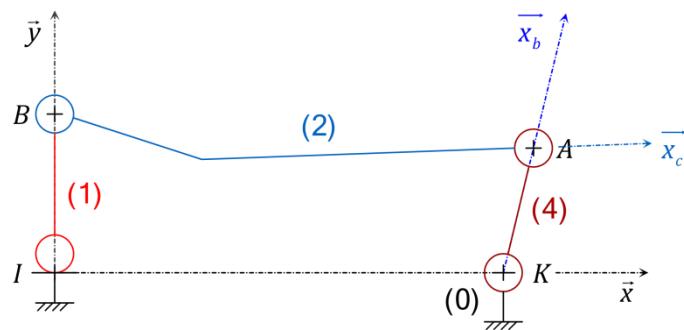
En utilisant la formule du barycentre, on obtient :

$$(m_B + m_v) \overrightarrow{OG_T} = m_B \overrightarrow{OG_B} + m_v \overrightarrow{OG_v} \Rightarrow (m_B + m_v) x_T = m_B x_B + m_v x_G \Leftrightarrow x_T = \frac{m_B x_B + m_v x_G}{m_B + m_v} .$$

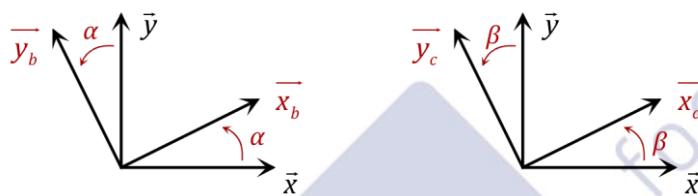
$$\text{A.N. } x_T = \frac{100 \times 1250 + 49 \times 960}{100 + 49} \Leftrightarrow x_T \blacksquare 1150 \text{ mm} .$$

II.2 - Étude géométrique

Question 3 Compléter le schéma cinématique esquissé sur le document réponse A conformément au modèle proposé en faisant apparaître les liaisons, les solides et les repères qui leurs sont associés.



Question 4 Compléter les figures de calcul esquissées sur le document réponse B .



Question 5 À partir d'une fermeture géométrique, montrer que l'équation scalaire qui lie la valeur de β à α , a , b , e et R_B est de la forme $a \cdot \sin(\alpha) = b \cdot \sin(\beta) - e \cdot \cos(\beta) + R_B$

La fermeture géométrique $\overrightarrow{IK} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$ donne l'équation vectorielle :

$$-\mu\vec{x} + a\vec{x}_b - b\vec{x}_c + e\vec{y}_c - R_B\vec{y} = \vec{0}.$$

La projection sur \vec{y} de cette relation permet d'obtenir $a\sin\alpha - b\sin\beta + e\cos\beta - R_B = 0$.

$$\Rightarrow a\sin\alpha = b\sin\beta - e\cos\beta + R_B.$$

Question 6 Déterminer les expressions des angles α_i et α_f en fonction de R_B , e et a . En calculer les valeurs en radians.

Au cours du mouvement, l'angle β reste faible, on peut donc utiliser les approximations $\cos\beta \approx 1$ et $\sin\beta \approx 0$.

$$\text{Ainsi } \sin\alpha = \frac{R_B - e}{a} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_i = \arcsin\left(\frac{R_B - e}{a}\right) \\ \alpha_f = \pi - \arcsin\left(\frac{R_B - e}{a}\right) \end{cases}$$

$$\text{A.N. } \begin{cases} \alpha_i = 66,8^\circ \\ \alpha_f = 111,4^\circ \end{cases} \text{ (ce qui correspond aux valeurs données dans la suite du sujet).}$$

Question 7 Déduire de la courbe fournie la valeur d'inclinaison maximale du cadre par rapport au sol, notée β_{max} . Conclure sur l'hypothèse d'étude suivante : « Le cadre sera supposé horizontal lors du béquillage ».

D'après la figure 2.4, $\beta_{max} = 1,1^\circ$. Cet angle est très faible et permet bien de valider l'hypothèse stipulant que le cadre est supposé horizontal lors du béquillage.

II.3 - Effort de béquillage

Question 8 Donner la forme du torseur des actions mécaniques transmissibles du sol (0) sur la béquille (4) en K dans la base $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

Le torseur des actions mécaniques transmissibles du sol (0) sur la béquille (4) est le suivant :

$$\{0 \rightarrow 4\} = \underset{K}{\left\{ \begin{array}{l} X_{04}\bar{x} + Y_{04}\bar{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}}.$$

Remarque : d'après l'hypothèse qui suppose les liaisons sans frottement à l'exception du contact Roue/Sol, on pourrait être tenté de ne pas mettre la composante sur \bar{x} mais on serait alors en difficulté pour répondre à la question 15.

Question 9 Donner la forme du torseur des actions mécaniques transmissibles du sol (0) sur la roue (1) en I dans la base $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

Le torseur des actions mécaniques transmissibles du sol (0) sur la roue (1) est le suivant :

$$\{0 \rightarrow 1\} = \underset{I}{\left\{ \begin{array}{l} X_{01}\bar{x} + Y_{01}\bar{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}}.$$

Question 10 Donner la forme du torseur des actions mécaniques exercées par l'action de la pesanteur sur l'ensemble $\Sigma = \{1, 2, 3, 4\}$ en G_T dans la base $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

Le torseur des actions mécaniques exercées par l'action de la pesanteur sur l'ensemble Σ est le suivant :

$$\{pes \rightarrow \Sigma\} = \underset{G_T}{\left\{ \begin{array}{l} -m_T g \bar{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}}.$$

Question 11 Appliquer le théorème du moment statique à Σ en I en projection sur \bar{z} . En déduire la relation qui lie F_C à Y_{04} en fonction de $\mu, a, k, q, d, y_M, \beta, m_T$ et g .

On isole le système $\{\Sigma\}$.

BAME :

$$\begin{aligned} \{0 \rightarrow 4\} &= \underset{K}{\left\{ \begin{array}{l} X_{04}\bar{x} + Y_{04}\bar{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}} & \{0 \rightarrow 1\} &= \underset{I}{\left\{ \begin{array}{l} X_{01}\bar{x} + Y_{01}\bar{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}} \\ \{pes \rightarrow \Sigma\} &= \underset{G_T}{\left\{ \begin{array}{l} -m_T g \bar{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}} & \{cy \rightarrow 4\} &= \underset{M}{\left\{ \begin{array}{l} -F_C \bar{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}} \end{aligned}$$

On calcule tous les moments au point I en utilisant la formule de Varignon.

$$\overrightarrow{M_{I,pes \rightarrow \Sigma}} = \overrightarrow{M_{G_T, pes \rightarrow \Sigma}} + \overrightarrow{IG_T} \wedge (-m_T g \bar{y}) = (\overrightarrow{IK} + \overrightarrow{KG_T}) \wedge (-m_T g \bar{y}) = (-\mu \bar{x} + k \bar{x}_c + q \bar{y}_c) \wedge (-m_T g \bar{y}).$$

$$\overrightarrow{M_{I,0 \rightarrow 4}} = (\mu - k \cos \beta + q \sin \beta) m_T g \bar{z}$$

$$\overrightarrow{M_{I,0 \rightarrow 4}} = -\mu \bar{x} \wedge (X_{04}\bar{x} + Y_{04}\bar{y}) = -\mu Y_{04} \bar{z}$$

$$\overrightarrow{M_{I,cy \rightarrow 4}} = (-\mu \bar{x} + a \bar{y} - d \bar{x}_c + y_M \bar{y}_c) \wedge (-F_C \bar{x}) = (a - d \sin \beta + y_M \cos \beta) F_C \bar{z}$$

On applique le PFS en moment au point I sur \bar{z} : $(\mu - k \cos \beta + q \sin \beta) m_T g - \mu Y_{04} + (a - d \sin \beta + y_M \cos \beta) F_C = 0$.

Ainsi,
$$\boxed{F_C = \frac{\mu Y_{04} - (\mu - k \cos \beta + q \sin \beta) m_T g}{a - d \sin \beta + y_M \cos \beta}}.$$

Question 12 Montrer qu'alors, on peut exprimer F_C sous la forme : $F_C \approx \frac{\mu \cdot Y_{04} - (\mu - k) \cdot m_T \cdot g}{y_M + a}$.

Déterminer la condition sur y_M qui conduit alors à une action à développer par le cycliste F_c maximale

Avec l'approximation des petits angles proposée, on obtient
$$F_c = \frac{\mu Y_{04} - (\mu - k)m_T g}{a + y_M}$$
 ce qui correspond bien à la forme donnée dans la question.

F_c est donc maximale quand y_M est minimale donc quand $y_M = 900\text{ mm}$.

Question 13 En isolant l'ensemble Σ et en appliquant le théorème de la résultante statique, écrire les équations scalaires qui relient les différentes composantes des torseurs d'actions mécaniques exercées par le sol.

On reprend le même isolement (et par conséquent le même BAME) que dans la question 11.

On applique le PFS en résultante sur \vec{x} et \vec{y} :

$$\begin{cases} X_{01} + X_{04} - F_c = 0 \\ Y_{01} + Y_{04} - m_T g = 0 \end{cases}$$

Question 14 Montrer alors, que même en supposant le glissement en I , l'isolement de l'ensemble ne permet pas de déterminer l'action du cycliste.

En supposant le glissement en I on pourrait obtenir une équation entre X_{01} et Y_{01} . À celle-ci s'ajoutent les 3 équations issues du PFS sur l'isolement de Σ . On a donc cinq inconnues (X_{04} , Y_{04} , X_{01} , Y_{01} et F_c) pour seulement quatre équations. On ne peut donc pas déterminer F_c avec ce seul isolement.

Question 15 Montrer en appliquant le PFS à la bâquille (4) et en choisissant une équation scalaire pertinente parmi celles disponibles, que pour la position étudiée ($\alpha = 90^\circ$) et pour l'isolement choisi, $X_{03} = 0$.

On isole la bâquille (4).

BAME :

$$\{0 \rightarrow 4\}_K = \begin{Bmatrix} X_{04}\vec{x} + Y_{04}\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \{2 \rightarrow 4\}_A = \begin{Bmatrix} X_{24}\vec{x} + Y_{24}\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

On déplace tous les moments au point A :

$$\overline{M}_A(0 \rightarrow 4) = \overline{M}_K(0 \rightarrow 4) + \overline{AK} \wedge (X_{04}\vec{x} + Y_{04}\vec{y}) = \vec{0} - a\vec{x}_b \wedge (X_{04}\vec{x} + Y_{04}\vec{y}) = -a\vec{y} \wedge (X_{04}\vec{x} + Y_{04}\vec{y}) = aX_{04}\vec{z}.$$

On applique le PFS en moment au point A sur \vec{z} : $aX_{04} + 0 = 0 \Leftrightarrow X_{04} = 0$.

Question 16 Conclure sur le respect de l'exigence 110 du cahier des charges du vélo (figure 2.1, page 4).

D'après le sujet, il faut $F_c \approx 80\text{ N}$ pour assurer le bâquillage. En se référant à la figure 2.1, un homme peut répéter, d'après la législation, l'opération 30 fois par période de 24 heures ce qui permet les livraisons mais une femme, toujours d'après la législation, ne peut répéter que 2 fois cette opération de bâquillage en 24 heures ce qui ne permet pas de réaliser des livraisons. Ainsi l'exigence 110 du cahier des charges du vélo n'est pas respectée pour une utilisation en livraisons.

III - Vérification du dimensionnement des organes participant au freinage

III.1 - Capacité de freinage d'urgence

Objectif: Déterminer les conditions portant sur les pneumatiques qui permettent d'assurer un freinage d'urgence conforme aux exigences de la figure 3.1

Question 17 Déterminer l'expression des résultantes dynamiques :

1. du solide (1) dans son mouvement par rapport au sol (0) : $\overrightarrow{R_d(1/0)}$,
2. de l'ensemble (2) dans son mouvement par rapport au sol (0) : $\overrightarrow{R_d(2/0)}$,
3. du solide (3) dans son mouvement par rapport au sol (0) : $\overrightarrow{R_d(3/0)}$.

Par définition, on a $\overrightarrow{R_d(1/0)} = m_1 \overrightarrow{\Gamma(B/0)}$. Ainsi $\overrightarrow{R_d(1/0)} = m_1 \overrightarrow{\Gamma(G_2/0)} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{R_d(1/0)} = m_1 \gamma_{G_2} \vec{x}}$

On a directement $\boxed{\overrightarrow{R_d(2/0)} = m_2 \gamma_{G_2} \vec{x}}$.

De même que pour le solide (1), on obtient $\boxed{\overrightarrow{R_d(3/0)} = m_3 \gamma_{G_2} \vec{x}}$.

Question 18 En appliquant le théorème de la résultante dynamique au système matériel {1, 2, 3}, déterminer les expressions :

- de la somme des composantes tangentielles ($X_{01} + X_{03}$) et
 - de la somme des composantes normales ($Y_{01} + Y_{03}$)
- de l'action du sol sur les roues.

On isole {1,2,3}.

BAME :

$$\begin{aligned} \{0 \rightarrow 1\}_I &= \begin{cases} -X_{01}\vec{x} + Y_{01}\vec{y} \\ \vec{0} \end{cases} & \{pes \rightarrow 1\}_B &= \begin{cases} -m_1 g \vec{y} \\ \vec{0} \end{cases} & \{pes \rightarrow 2\}_{G_2} &= \begin{cases} -m_2 g \vec{y} \\ \vec{0} \end{cases} \\ \{0 \rightarrow 3\}_I &= \begin{cases} -X_{03}\vec{x} + Y_{03}\vec{y} \\ \vec{0} \end{cases} & \{pes \rightarrow 3\}_C &= \begin{cases} -m_3 g \vec{y} \\ \vec{0} \end{cases} \end{aligned}$$

On applique le PFD en résultante sur \vec{x} et \vec{y} :

$$\begin{cases} -X_{01} - X_{03} = (m_1 + m_2 + m_3) \gamma_{G_2} \\ Y_{01} + Y_{03} - (m_1 + m_2 + m_3) g = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_{01} + X_{03} = -(m_1 + m_2 + m_3) \gamma_{G_2} \\ Y_{01} + Y_{03} = (m_1 + m_2 + m_3) g \end{cases}$$

Question 19 Déterminer une expression de k_f en fonction de g et γ_{G_2} .

En utilisant les deux relations données dans l'énoncé, on obtient :

$$\begin{cases} k_f (Y_{01} + Y_{03}) = -(m_1 + m_2 + m_3) \gamma_{G_2} \\ Y_{01} + Y_{03} = (m_1 + m_2 + m_3) g \end{cases}$$

$$\Rightarrow k_f (m_1 + m_2 + m_3) g = -(m_1 + m_2 + m_3) \gamma_{G_2} \Leftrightarrow k_f g = -\gamma_{G_2} \Leftrightarrow \boxed{k_f = -\frac{\gamma_{G_2}}{g}}.$$

Question 20 À partir de l'expression de la condition de non glissement des roues sur le sol, déterminer la valeur limite de $\gamma_{G_2}(t)$ en fonction de f' et g . Montrer alors que toutes les configurations du tableau 3.3 ne permettent pas de satisfaire l'exigence 210.

Le sujet donne $X_{0i} < f'Y_{0i} \Rightarrow k_f < f' \Leftrightarrow -\frac{\gamma_{G_2}}{g} < f' \Leftrightarrow -\gamma_{G_2} < f'g$ donc $\boxed{\gamma_{G_2} > -f'g}$.

Dans le tableau 3.3, la pire condition correspond au pneu anormalement usé sur route goudronnée mouillée, on a alors $\gamma_{lim} = -2,9 \text{ m.s}^{-2}$. La décélération est donc de $2,9 \text{ m.s}^{-2}$ ce qui est inférieur aux $4,5 \text{ m.s}^{-2}$ demandés par l'exigence 210. Cette exigence n'est donc pas satisfaite pour toutes les configurations du tableau 3.3.

Question 21 En étudiant le mouvement de l'ensemble {1,2,3} lors du freinage, montrer que la distance de freinage d_f définie par le passage de la vitesse initiale v_0 à une vitesse nulle peut s'écrire :

$$d_f = -v_0^2 / (2 \cdot \gamma_{G_2})$$
.

Comme la décélération est supposée constante, les expressions de la vitesse et la position sont de la forme :

$$\begin{cases} v(t) = v_0 + \gamma_{G_2} t \\ x(t) = x_0 + v_0 t + \gamma_{G_2} \frac{t^2}{2} \end{cases} \text{ en prenant } t=0 \text{ comme origine des temps et } v(t=0)=v_0.$$

En appelant t_f le temps de freinage, on a $v(t=t_f)=0$ et $x(t=t_f)=d_f$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = v_0 + \gamma_{G_2} t_f \\ d_f = v_0 t_f + \gamma_{G_2} \frac{t_f^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_f = -\frac{v_0}{\gamma_{G_2}} \\ d_f = v_0 t_f + \gamma_{G_2} \frac{t_f^2}{2} \end{cases} \Rightarrow d_f = -\frac{v_0^2}{\gamma_{G_2}} + \frac{v_0^2}{2 \cdot \gamma_{G_2}} \Leftrightarrow \boxed{d_f = -\frac{v_0^2}{2 \cdot \gamma_{G_2}}}.$$

Question 22 Conclure quant au respect de l'exigence 220 portant sur la distance de freinage et sur la responsabilité de l'utilisateur.

La question précédente nous permet de calculer d_f :

- dans les conditions normales $d_f = \frac{-\left(\frac{25}{3,6}\right)^2}{2 \times (-4,5)} = 5,36 \text{ m} < 6 \text{ m}$;

- dans les conditions dégradées $d_f = \frac{-\left(\frac{25}{3,6}\right)^2}{2 \times (-2,95)} = 8,17 \text{ m} > 6 \text{ m}$.

L'exigence 220 est donc bien respectée en conditions normales mais pas en conditions dégradées. L'utilisateur doit vérifier régulièrement l'état de ses pneumatiques et adapter son allure aux conditions de la chaussée pour ne pas devenir un danger pour lui-même et pour les autres.

III.2 - Dimensionnement des organes de freinage

Objectif : Valider le dimensionnement des organes de freinage

Question 23 Déterminer l'expression du moment dynamique de l'ensemble (2) par rapport au sol (0) au point $G_2 : \overrightarrow{\delta(G_2, 2/0)}$.

L'ensemble (2) est en translation par rapport au sol (0) donc $\boxed{\overrightarrow{\delta(G_2, 2/0)} = \vec{0}}$

Question 24 Déterminer l'expression de la projection sur \vec{z} :

1. du moment cinétique au point B de la roue arrière (1) par rapport au sol (0) : $\overrightarrow{\sigma(B,1/0)}\cdot\vec{z}$,
2. du moment dynamique au point B de la roue arrière (1) par rapport au sol (0) : $\overrightarrow{\delta(B,1/0)}\cdot\vec{z}$.

Comme le point B est le centre de gravité de l'ensemble (1), on peut écrire $\overrightarrow{\sigma(B,1/0)}=I_B(1)\overrightarrow{\Omega(1/0)}$.

En utilisant la composition des vecteurs vitesse de rotation, on a : $\overrightarrow{\Omega(1/0)}=\overrightarrow{\Omega(1/2)}+\overrightarrow{\Omega(2/0)}=\omega_{12}\vec{z}$.

D'où $\overrightarrow{\sigma(B,1/0)}=\begin{pmatrix} X & X & X \\ X & X & X \\ X & X & I_{B1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ X \\ I_{B1}\omega_{12} \end{pmatrix}$ où X désigne un terme inconnu.

Finalement $\boxed{\overrightarrow{\sigma(B,1/0)}\cdot\vec{z}=I_{B1}\omega_{12}}$.

$\overrightarrow{\delta(B,1/0)}=\frac{d\overrightarrow{\sigma(B,1/0)}}{dt}\Big|_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ car le point B est le centre de gravité de l'ensemble (1).

On utilise la formule $\frac{d(\overrightarrow{\sigma(B,1/0)}\cdot\vec{z})}{dt}=\frac{d(\overrightarrow{\sigma(B,1/0)})}{dt}\Big|_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}\cdot\vec{z}+\overrightarrow{\sigma(B,1/0)}\cdot\frac{d(\vec{z})}{dt}\Big|_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$.

D'où $\overrightarrow{\delta(B,1/0)}\cdot\vec{z}=\frac{d(\overrightarrow{\sigma(B,1/0)})}{dt}\Big|_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}\cdot\vec{z}=\frac{d(\overrightarrow{\sigma(B,1/0)}\cdot\vec{z})}{dt}-\overrightarrow{\sigma(B,1/0)}\cdot\frac{d\vec{z}}{dt}\Big|_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}=\frac{d(\overrightarrow{\sigma(B,1/0)}\cdot\vec{z})}{dt}\Leftrightarrow$

$\boxed{\overrightarrow{\delta(B,1/0)}\cdot\vec{z}=I_{B1}\dot{\omega}_{12}}$.

Question 25 Déterminer l'expression de la projection sur \vec{z} du moment dynamique de la roue avant (3) par rapport au sol (0) au point C : $\overrightarrow{\delta(C,3/0)}\cdot\vec{z}$.

En utilisant la même démarche qu'à la question précédente, on obtient $\boxed{\overrightarrow{\delta(C,3/0)}\cdot\vec{z}=I_{C3}\dot{\omega}_{32}}$.

Question 26 En supposant qu'il y a roulement sans glissement en B (respectivement en C), déterminer la relation entre ω_{12} et $v_{G_2}(t)$ (respectivement entre ω_{32} et $v_{G_2}(t)$).

Avec l'hypothèse de roulement sans glissement, on a $v_{G_2}(t)=-R_1\omega_{12}$ et $v_{G_2}(t)=-R_3\omega_{32}$.

Question 27 En appliquant le théorème du moment dynamique à chacune des roues, montrer que les

composantes X_{01} et X_{03} ont pour expressions : $X_{01}=\frac{C_{f1}+\frac{I_{B1}}{R_1}\gamma_{G_2}}{R_1}$ et $X_{03}=\frac{C_{f3}+\frac{I_{C3}}{R_3}\gamma_{G_2}}{R_3}$.

On isole la roue (1).

$$\{0 \rightarrow 1\}_I = \begin{cases} -X_{01}\vec{x} + Y_{01}\vec{y} \\ \vec{0} \end{cases} \quad \{pes \rightarrow 1\}_B = \begin{cases} -m_1g\vec{y} \\ \vec{0} \end{cases} \quad \{2 \rightarrow 1\}_B = \begin{cases} X_{21}\vec{x} + Y_{21}\vec{y} \\ C_{f1} \cdot \vec{z} \end{cases}$$

On calcule le moment au point B de l'action du torseur des actions mécaniques transmissibles du sol (0) sur la roue (1) : $\overrightarrow{M_B(0 \rightarrow 1)}=\overrightarrow{M_I(0 \rightarrow 1)}+\overrightarrow{BI} \wedge (-X_{01}\vec{x} + Y_{01}\vec{y})=-R_1\vec{y} \wedge (-X_{01}\vec{x} + Y_{01}\vec{y})=-R_1X_{01}\vec{z}$.

On applique le PFD en moment au point B sur \vec{z} : $-R_1X_{01}+C_{f1}=I_{B1}\dot{\omega}_{12}=-I_{B1}\frac{\gamma_{G_2}}{R_1} \Rightarrow$

$$\boxed{X_{01}=\frac{C_{f1}+I_{B1}\frac{\gamma_{G_2}}{R_1}}{R_1}}.$$

Avec un raisonnement analogue, on obtient

$$X_{03} = \frac{C_{f3} + I_{c3} \frac{\gamma_{G_2}}{R_3}}{R_3}.$$

Question 28 En appliquant le théorème du moment dynamique au système matériel $\{1,2,3\}$ en I , montrer que l'on peut exprimer Y_{03} sous la forme suivante :

$$Y_{03} = \frac{1}{L} \left[g(m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot L) - \gamma_{G_2} (y_2 \cdot m_2 + R_1 \cdot m_1 + R_3 \cdot m_3) + I_{B1} \frac{d\omega_{12}}{dt} + I_{c3} \frac{d\omega_{32}}{dt} \right].$$

On isole $\{1,2,3\}$.

BAME :

$$\{0 \rightarrow 1\}_I = \begin{cases} -X_{01}\vec{x} + Y_{01}\vec{y} \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\{pes \rightarrow 1\}_B = \begin{cases} -m_1g\vec{y} \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\{pes \rightarrow 2\}_{G_2} = \begin{cases} -m_2g\vec{y} \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\{0 \rightarrow 3\}_J = \begin{cases} -X_{03}\vec{x} + Y_{03}\vec{y} \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\{pes \rightarrow 3\}_C = \begin{cases} -m_3g\vec{y} \\ \vec{0} \end{cases}$$

En déplaçant les moments avec la méthode des bras de levier, on obtient :

$$\{0 \rightarrow 1\}_I = \begin{cases} -X_{01}\vec{x} + Y_{01}\vec{y} \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\{pes \rightarrow 1\}_I = \begin{cases} -m_1g\vec{y} \\ \vec{0} \end{cases}$$

$$\{pes \rightarrow 2\}_I = \begin{cases} -m_2g\vec{y} \\ -m_2gx_2\vec{z} \end{cases}$$

$$\{0 \rightarrow 3\}_I = \begin{cases} -X_{03}\vec{x} + Y_{03}\vec{y} \\ Y_{03}L\vec{z} \end{cases}$$

$$\{pes \rightarrow 3\}_I = \begin{cases} -m_3g\vec{y} \\ -m_3gL\vec{z} \end{cases}$$

On déplace ensuite les moments dynamiques au point I en utilisant la formule de Varignon et on ne s'intéresse qu'à la composante sur \vec{z} :

$$\overrightarrow{\delta(I,1/0)}.\vec{z} = \overrightarrow{\delta(B,1/0)}.\vec{z} + (\overrightarrow{IB} \wedge \overrightarrow{R_d(1/0)}).\vec{z} = \overrightarrow{\delta(B,1/0)}.\vec{z} + (R_1\vec{y} \wedge m_1\gamma_{G_2}\vec{x}).\vec{z} = I_{B1}\dot{\omega}_{12} + (-R_1m_1\gamma_{G_2}\vec{z}).\vec{z} = I_{B1}\dot{\omega}_{12} - R_1m_1\gamma_{G_2}$$

De même :

$$\overrightarrow{\delta(I,3/0)}.\vec{z} = \overrightarrow{\delta(C,3/0)}.\vec{z} + (\overrightarrow{IC} \wedge \overrightarrow{R_d(3/0)}).\vec{z} = I_{c3}\dot{\omega}_{32} + ((L\vec{x} + R_3\vec{y}) \wedge m_3\gamma_{G_2}\vec{x}).\vec{z} = I_{c3}\dot{\omega}_{32} - R_3m_3\gamma_{G_2}$$

$$\overrightarrow{\delta(I,2/0)}.\vec{z} = \overrightarrow{\delta(G_2,2/0)}.\vec{z} + (\overrightarrow{IG_2} \wedge \overrightarrow{R_d(2/0)}).\vec{z} = 0 + ((x_2\vec{x} + y_2\vec{y}) \wedge m_2\gamma_{G_2}\vec{x}).\vec{z} = -y_2m_2\gamma_{G_2}.$$

On applique le PFD en moment au point I sur \vec{z} :

$$Y_{03}L - m_2gx_2 - m_3gL = I_{B1}\dot{\omega}_{12} - R_1m_1\gamma_{G_2} + I_{c3}\dot{\omega}_{32} - R_3m_3\gamma_{G_2} - y_2m_2\gamma_{G_2}$$

On retrouve ainsi l'équation demandée :

$$Y_{03} = \frac{1}{L} \cdot [g \cdot (m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot L) - \gamma_{G_2} \cdot (R_1 \cdot m_1 + R_3 \cdot m_3 + y_2 \cdot m_2) + I_{B1} \cdot \dot{\omega}_{12} + I_{c3} \cdot \dot{\omega}_{32}]$$

Question 29 Pour une décélération visée « dite d'urgence » conforme à l'exigence 210 de $-4,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, déterminer les couples de freinage optimaux à mettre en œuvre sur chacune des roues.

D'après la figure 3.3, pour la décélération visée de $-4,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, on relève $C_{f1opt} = 193 \text{ N} \cdot \text{m}$ et $C_{f3opt} = 172 \text{ N} \cdot \text{m}$.

Question 30 Conclure quant au système de freins installé sachant que les freins installés sur le G4e permettent d'envisager un couple de freinage maximum de $250 \text{ N} \cdot \text{m}$ pour une distance parcourue de 6 m .

$C_{f1opt} = 193 \text{ N} \cdot \text{m} < 250 \text{ N} \cdot \text{m}$ et $C_{f3opt} = 172 \text{ N} \cdot \text{m} < 250 \text{ N} \cdot \text{m}$ donc le système de freins installé permet bien la décélération d'urgence prévue.

Question 31 Proposer une solution technologique de pilotage des freins qu'il serait possible d'intégrer pour optimiser les conditions de freinage.

On peut proposer un système où quand le cycliste freine au-delà d'une certaine limite, on détecte un freinage d'urgence et au lieu de commander directement le couple de freinage appliqué, on utilise un asservissement pour optimiser les couples appliqués sur les deux roues.

IV - Étude du capteur de couple

IV.2 - Tension de sortie du transducteur

Objectif : Exprimer la tension de sortie v_s du transducteur de couple en fonction de la variation d'inductance ΔL

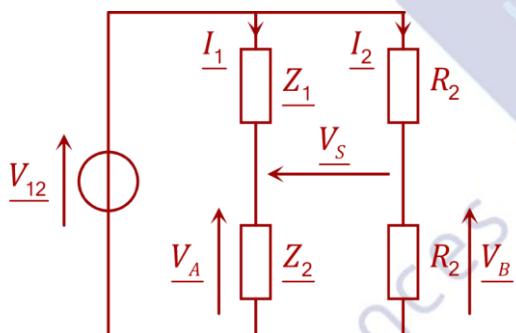
Question 32 En supposant que l'amplitude A des tensions v_1 et v_2 est nulle, donner sans justification les valeurs :

1. de la tension v_s ,
2. de la puissance débitée par chacune des deux sources de tension v_1 et v_2 .

La tension v_s est nulle et les sources de tensions v_1 et v_2 ne délivrent aucune puissance.

Question 33 Exprimer les tensions V_A et V_B en fonction de V_{12} et des paramètres définis figure 4.5.

Soit le schéma équivalent suivant :



Les deux impédances Z_1 et Z_2 sont associés en série et alimentées par une source de tension, on peut appliquer la formule du pont diviseur de tension avec la notation complexe :

$$\underline{V}_A = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{V}_{12} = \left[\frac{R_1 + j(L_1 + \Delta L)\omega}{R_1 + jL_1\omega + R_1 + j(L_1 + \Delta L)\omega} \right] \underline{V}_{12}$$

$$\boxed{\underline{V}_A = \frac{1}{2} \left[\frac{R_1 + j(L_1 + \Delta L)\omega}{R_1 + j\left(L_1 + \frac{\Delta L}{2}\right)\omega} \right] \underline{V}_{12}}$$

De même, les deux résistances R_2 sont associées en série et alimentées par une source de tension :

$$\boxed{\underline{V}_B = \frac{R_2}{R_2 + R_2} \underline{V}_{12} = \frac{1}{2} \underline{V}_{12}}.$$

Question 34 En déduire les expressions des paramètres X_{var} , R_{tot} et X_{tot} tels que : $\underline{V}_s = \frac{j \cdot X_{var}}{2(R_{tot} + j \cdot X_{tot})} \underline{V}_{12}$.

La loi des mailles permet d'écrire : $\underline{V}_A = \underline{V}_s + \underline{V}_B \Leftrightarrow \underline{V}_s = \underline{V}_A - \underline{V}_B = \frac{1}{2} \left[\frac{R_1 + j(L_1 + \Delta L)\omega}{R_1 + j\left(L_1 + \frac{\Delta L}{2}\right)\omega} \right] \underline{V}_{12} - \frac{1}{2} \underline{V}_{12}$

$$\underline{V}_s = \frac{1}{2} \left[\frac{R_1 + j(L_1 + \Delta L)\omega}{R_1 + j\left(L_1 + \frac{\Delta L}{2}\right)\omega} - 1 \right] \underline{V}_{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{R_1 + j(L_1 + \Delta L)\omega - R_1 - j\left(L_1 + \frac{\Delta L}{2}\right)\omega}{R_1 + j\left(L_1 + \frac{\Delta L}{2}\right)\omega} \right] \underline{V}_{12}$$

$$\underline{V}_S = \frac{1}{2} \left[\frac{j \frac{\Delta L}{2} \omega}{R_1 + j \left(L_1 + \frac{\Delta L}{2} \right) \omega} \right] V_{12} = \frac{j X_{var}}{2(R_{tot} + j X_{tot})} V_{12} \text{ avec } R_{tot} = R_1, X_{var} = \frac{\Delta L}{2} \cdot \omega \text{ et } X_{tot} = \left(L_1 + \frac{\Delta L}{2} \right) \cdot \omega.$$

Question 35 Calculer la valeur de R_{tot} ainsi que les valeurs extrêmes de X_{tot} . Proposer alors une simplification de la grandeur \underline{V}_S / V_{12} .

A.N. $R_{tot} = 5 \Omega$

$$X_{totMax} = L_1 \omega = 5 \cdot 10^{-3} \times 2\pi \times 20 \cdot 10^3 = 628,3 \Omega$$

$$X_{totMin} = \left(L_1 - \frac{\Delta L_{Max}}{2} \right) \omega = \left(5 \cdot 10^{-3} - \frac{10^{-3}}{2} \right) \times 2\pi \times 20 \cdot 10^3 = 565,5 \Omega$$

On constate que R_{tot} est négligeable devant X_{tot} , au minimum $\frac{R_{tot}}{X_{tot}} \ll 0,008$, l'expression de la tension \underline{V}_S se

simplifie ainsi : $\underline{V}_S = \frac{X_{var}}{X_{tot}} \cdot \frac{V_{12}}{2} \Leftrightarrow \underline{V}_S = \frac{\Delta L}{4 \left(L_1 + \frac{\Delta L}{2} \right)} V_{12}.$

Question 36 Indiquer la condition que doivent satisfaire les grandeurs L_1 et ΔL afin de pouvoir considérer le transducteur linéaire.

L'expression simplifiée de la tension \underline{V}_S est $\underline{V}_S = \frac{\Delta L}{4 \left(L_1 + \frac{\Delta L}{2} \right)} V_{12}$. Afin de pouvoir considérer le transducteur

linéaire, il faut que la tension \underline{V}_S soit proportionnelle à ΔL , le dénominateur dans l'expression simplifiée de la tension \underline{V}_S doit être constant $\Rightarrow L_1 \ll \frac{|\Delta L|}{2}$. Dans ce cas, l'expression de la tension \underline{V}_S devient $\underline{V}_S = \frac{\Delta L}{4 L_1} V_{12}$.

IV.3 - Consommation énergétique du transducteur

Objectif : Dimensionner les résistances R_2

Question 37 Exprimer, en fonction de A et des éléments du schéma du transducteur, le courant efficace I_1 . Calculer sa valeur.

L'impédance de la branche où circule le courant i_1 est $2Z_1$: $I_1 = \frac{V_{12}}{2Z_1}$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{V_{12}}{2|Z_1|} \text{ avec } V_{12} = 2A \text{ et } |Z_1| = \sqrt{R_1^2 + (L_1 \omega)^2} \Rightarrow I_1 = \frac{A}{\sqrt{R_1^2 + (L_1 \omega)^2}}.$$

A.N. $I_1 = \frac{8}{\sqrt{5^2 + (5 \cdot 10^{-3} \times 2\pi \times 20 \cdot 10^3)^2}} = \frac{8}{\sqrt{25 + (200\pi)^2}} \Leftrightarrow I_1 = 12,7 \text{ mA}.$

Question 38 Exprimer la puissance P_{trans} absorbée par le transducteur en fonction de R_1 , R_2 et A .

Seules les résistances absorbent de la puissance active, on a donc d'après Boucherot : $P_{trans} = 2P_{R_1} + 2P_{R_2}$ (les deux résistances R_1 sont parcourues par le même courant, de même pour les résistances R_2) avec $P_{R_1} = R_1 I_1^2$ et

$$P_{R_2} = \frac{V_{12}^2}{4R_2}. \text{ D'où } P_{trans} = 2R_1 I_1^2 + \frac{V_{12}^2}{2R_2} = \frac{R_1}{2[R_1^2 + (L_1\omega)^2]} V_{12}^2 + \frac{V_{12}^2}{2R_2} \Leftrightarrow P_{trans} = \frac{2R_1 A^2}{[R_1^2 + (L_1\omega)^2]} + \frac{2A^2}{R_2}.$$

Question 39 Déduire des questions précédentes la valeur minimale de R_2 qui permet de limiter la puissance P_{trans} absorbée par le transducteur à $0,5W$.

On souhaite avoir $P_{trans} \leq \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{2R_1 A^2}{[R_1^2 + (L_1\omega)^2]} + \frac{2A^2}{R_2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2A^2}{R_2} \leq \frac{1}{2} - \frac{2R_1 A^2}{[R_1^2 + (L_1\omega)^2]} \Leftrightarrow \frac{2A^2}{R_2} \leq \frac{R_1^2 + (L_1\omega)^2 - 4R_1 A^2}{2[R_1^2 + (L_1\omega)^2]}$$

$$\Leftrightarrow R_2 \geq \frac{4[R_1^2 + (L_1\omega)^2]A^2}{R_1^2 + (L_1\omega)^2 - 4R_1 A^2} \Rightarrow R_{2min} = \frac{4[R_1^2 + (L_1\omega)^2]A^2}{(R_1^2 + (L_1\omega)^2 - 4R_1 A^2)}.$$

$$\text{A.N. } R_{2min} = \frac{4 \times [25 + (200\pi)^2] \times 8^2}{(25 + (200\pi)^2 - 4 \times 5 \times 8^2)} \Leftrightarrow R_{2Min} = 256,3 \Omega.$$

IV.4 - Dimensionnement du CAN

Objectif: Estimer l'influence du convertisseur analogique → numérique sur le respect de l'exigence de précision

Question 40 Calculer l'incertitude introduite sur la mesure du couple C_{ped} par la conversion analogique → numérique. Comparer cette incertitude à celle tolérée par l'exigence de précision (exigence 320, figure 4.1) et conclure quant au dimensionnement du CAN.

L'incertitude introduite sur la mesure de la tension V_{ampl} par la conversion analogique → numérique est le quantum q_{CAN} avec $q_{CAN} = \frac{PE}{2^n}$ où PE est la pleine échelle et n le nombre de bits du CAN.

La relation entre V_{ampl} et C_{ped} est $V_{ampl} = K_{trans} K_{ampl} C_{ped}$.

L'incertitude $\varepsilon_{C_{ped}}$ introduite sur la mesure du couple C_{ped} par la conversion analogique → numérique est $\varepsilon_{C_{ped}} = \frac{q_{CAN}}{K_{trans} K_{ampl}} = \frac{PE}{2^n K_{trans} K_{ampl}}$.

Dans notre cas, $PE = V_{ref+} - V_{ref-} = 5 - 0 = 5V$ et $n = 16$.

$$\text{A.N. } \varepsilon_{C_{ped}} = \frac{5}{2^{16} \times 6,2 \cdot 10^{-3} \times 4} \Leftrightarrow \varepsilon_{C_{ped}} = 0,003 N \cdot m.$$

L'exigence 320 de précision est bien respectée et le CAN est bien dimensionné car $\varepsilon_{C_{ped}} < 1 N \cdot m$.

IV.5 - Durée de la conversion analogique → numérique

Question 41 Sur le document réponse C, pour les quatre premières itérations de la boucle Tant que,

1. indiquer la valeur en binaire prise par Nint,
2. tracer l'évolution de la tension Vcna.

La relation entre Vcna, la tension de sortie du CNA et Nint, le nombre en entrée du CNA, est $V_{cna} = q_{CNA} \cdot Nint$ où q_{CNA} est le quantum du CNA.

Dans notre cas $q_{CNA} = \frac{5}{65536} V$ et $V_{ech} = 4,0625 V$.

$j=15$, $Nint = (1000\ 0000\ 0000\ 0000)_2 = 37768$, $V_{cna} = 2,5 V$, $V_{cna} < V_{ech} \Rightarrow$ le bit de poids 15 reste à 1.

$j=14$, $Nint = (1100\ 0000\ 0000\ 0000)_2 = 49152$, $V_{cna} = 3,75 V$, $V_{cna} < V_{ech} \Rightarrow$ le bit de poids 14 reste à 1.

$j=13$, $Nint = (1110\ 0000\ 0000\ 0000)_2 = 57334$, $V_{cna} = 4,374 V$, $V_{cna} > V_{ech} \Rightarrow$ le bit de poids 13 passe à 0.

$j=12$, $Nint = (1101\ 0000\ 0000\ 0000)_2 = 53248$, $V_{cna} = 4,0625 V$, $V_{cna} = V_{ech} \Rightarrow$ le bit de poids 12 reste à 1.



Question 42 Déterminer, en nombre de coups d'horloge, la durée que met le CAN à réaliser une conversion dans le cas le plus défavorable (cas où le nombre d'opérations est le plus élevé).

Pour l'initialisation, on effectue deux opérations (deux affectations).

Pour une boucle tant que, on effectue six opérations dans le cas le plus défavorable (un test Tant que, un test Si, trois affectations et une conversion). Comme le CNA possède 16 bits, la boucle Tant que est effectuée 16 fois.

Pour finir, pour renvoyer le résultat, on effectue une opération (une affectation).

Soit un total de $99(2+6\times 16+1)$ opérations.

Le temps de conversion maximal est de $99 \cdot T_{SCLK}$ où T_{SCLK} est la période du signal d'horloge.

Question 43 Déduire de la question précédente la fréquence minimale du signal d'horloge f_{SCLK} qui permet de réaliser 20 000 conversions par seconde.

On souhaite réaliser 20000 conversions par seconde, il faut avoir $20000 \times 99 \cdot T_{SCLK} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{T_{SCLK}} \geq 20000 \times 99$.

D'où $f_{SCLK} \geq 1,98 \text{ MHz}$.

V - Modélisation de l'association {onduleur + machine synchrone}

Objectif : Modéliser le fonctionnement de l'association { Machine synchrone à fcem trapézoïdales + onduleur }

Question 44 À partir de la figure 5.1, calculer, dans les unités du système international, la constante k_ϕ telle que $E_{max} = k_\phi \cdot \omega_m$.

D'après la figure 5.1, on a $E_{max} = 6V$ et $T_{el} = 10ms$ où T_{el} est la période des grandeurs électriques.

De plus $\omega_m = \frac{2\pi \cdot f_{el}}{p}$ où f_{el} est la fréquence des grandeurs électriques.

$$\text{D'où } k_\phi = \frac{E_{max}}{\omega_m} \Leftrightarrow k_\phi = \frac{p \cdot E_{max}}{2\pi \cdot f_{el}}$$

$$\text{A.N. } k_\phi = \frac{2 \times 6}{2 \times \pi \times 100} \Leftrightarrow k_\phi = 19,1 \text{ mV} \cdot \text{s/rad}$$

V.1 - Expression du couple électromagnétique

Question 45 Exprimer la puissance P_{emg} quelle que soit la valeur de θ_e en fonction des tensions et courants définis figure 5.3.

La puissance P_{emg} électromagnétique instantanée délivrée par la machine est égale à la puissance reçue par les trois générateurs de tensions $e_1(\theta_e)$, $e_2(\theta_e)$ et $e_3(\theta_e)$: $P_{emg} = e_1(\theta_e)i_1 + e_2(\theta_e)i_2 + e_3(\theta_e)i_3$.

Question 46 Dans le cas particulier où θ_e est compris entre 30 et 90° , exprimer P_{emg} en fonction de E_{max} et i_{10}

Dans le cas particulier où $30 \leq \theta_e \leq 90^\circ$, on a : $e_1(\theta_e) = E_{max}$, $e_2(\theta_e) = -E_{max}$, $i_1 = i_{10}$, $i_2 = i_{20}$ et $i_3 = 0$.

Comme $i_1 + i_2 + i_3 = 0$ et $i_3 = 0 \Rightarrow i_2 = -i_1 = -i_{10}$.

$$\text{D'où } P_{emg} = E_{max}i_{10} + (-E_{max})(-i_{10}) + 0 \Leftrightarrow P_{emg} = 2E_{max}i_{10}$$

Question 47 Déterminer la condition portant sur les courants i_{10} , i_{20} et i_{30} qui permet de rendre constante la puissance électromagnétique P_{emg} délivrée par la machine.

Les fcm $e_1(\theta_e)$, $e_2(\theta_e)$ et $e_3(\theta_e)$ forment un système triphasé équilibré. D'après l'expression de la puissance électromagnétique P_{emg} , il faut également que les courants i_1 , i_2 et i_3 forment un système triphasé équilibré pour que la puissance P_{emg} soit constante.

Question 48 En supposant que la puissance P_{emg} est constante, montrer que le couple électromagnétique délivré par la machine est proportionnel au courant i_{ond} débité par l'onduleur : $C_m = K_m \cdot i_{ond}$. Déterminer l'expression de K_m .

Puisque la puissance P_{emg} est supposée constante, cela est vrai pour n'importe quelle valeur de θ_e .

D'après la question 46, dans le cas où $30 \leq \theta_e \leq 90^\circ$, on a $P_{emg} = 2E_{max}i_{10}$ avec $i_1 = i_{ond} \Rightarrow P_{emg} = 2E_{max}i_{ond}$.

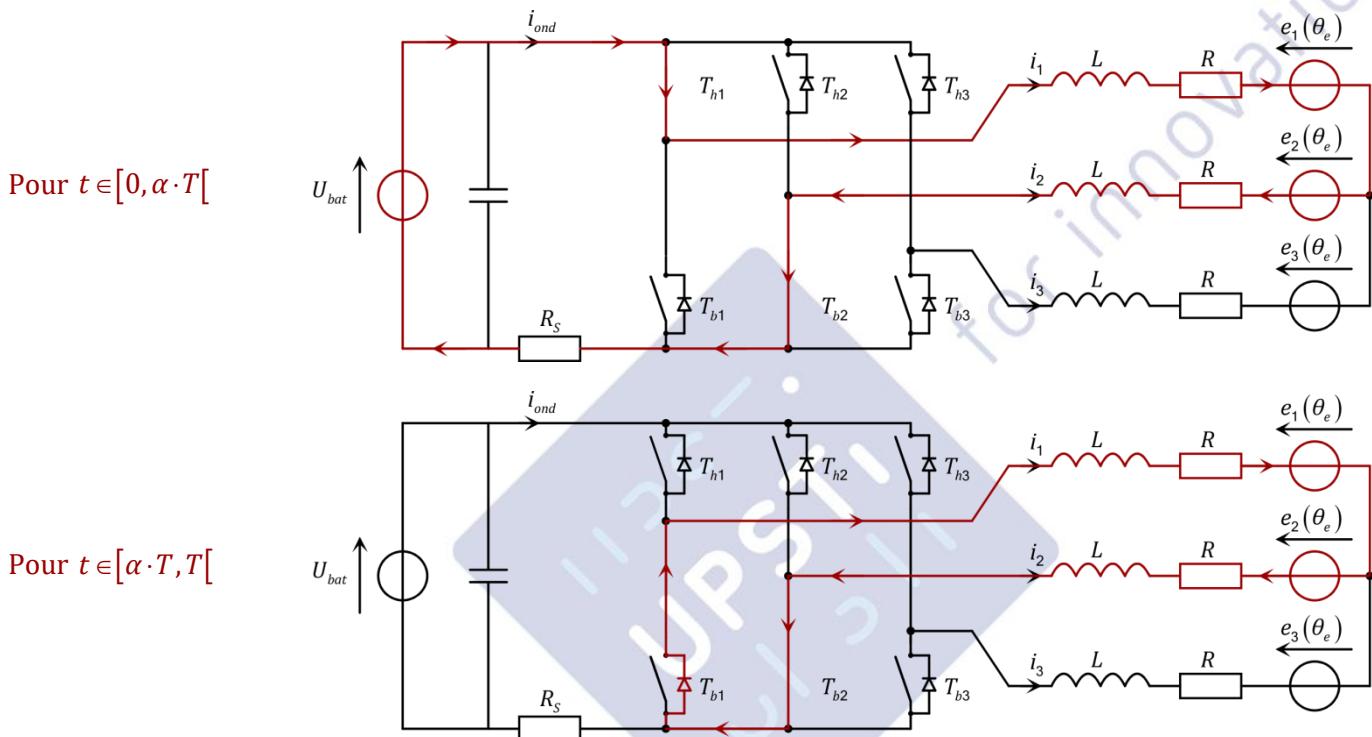
La puissance P_{emg} peut aussi s'exprimer à l'aide des grandeurs mécaniques sous la forme $P_{emg} = C_m \omega_m$.

On obtient l'égalité $2E_{max}i_{ond} = C_m\omega_m$ avec $E_{max} = k_\phi\omega_m$, d'où $C_m = \frac{2E_{max}i_{ond}}{\omega_m} = 2k_\phi \Rightarrow K_m = 2K_\phi$.

V.2 - Acquisition du courant

Question 49 Sur le document réponse D, surligner la maille dans laquelle circule un courant au cours de chacun des deux temps de la période de découpage.

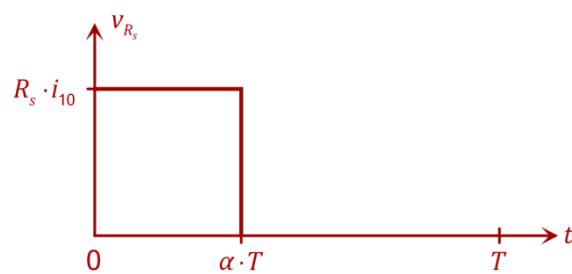
D'après la question 46, dans le cas où $30 \leq \theta_e \leq 90^\circ$, on a $i_1 = i_{10} > 0$, $i_2 = -i_{10}$ et $i_3 = 0$.



Question 50 Tracer alors l'évolution temporelle de la chute de tension aux bornes du shunt R_s au cours d'une période de découpage. Indiquer la condition à saisir pour réaliser l'acquisition du courant absorbé par la machine.

Dans le cas où $30 \leq \theta_e \leq 90^\circ$, pour $t \in [0, \alpha \cdot T]$, on a $i_{ond} = i_{10}$ et pour $t \in [\alpha \cdot T, T]$, on a $i_{ond} = 0$.

On obtient le tracé suivant pour la tension v_{R_s} , tension aux bornes du shunt R_s :



Si on considère que le courant i_{10} est constant sur une période de découpage T , alors la valeur moyenne de v_{R_s} est proportionnelle à R_s , i_{10} et au rapport cyclique α . La connaissance du rapport cyclique α et $\langle v_{R_s} \rangle$ permet de connaître la valeur de i_{10} .

VI - Asservissement du couple délivré par le groupe d'assistance

VI.1 - Modélisation de l'asservissement du couple C_{pm}

Question 51 Déterminer l'expression du moment d'inertie équivalent J_{eq} de l'ensemble du vélo ramené sur l'axe du pédalier en fonction de m_T , R_1 et K_t .

L'énergie cinétique vaut $E_c = \frac{1}{2}m_T v_{G_2}^2$ avec $\omega_{roue} = K_t \omega_{ped}$ et $|v_{G_2}| = R_1 |\omega_{roue}|$.

Soit $E_c = \frac{1}{2}m_T (R_1 K_t \omega_{ped})^2 = \frac{1}{2}m_T (R_1 K_t)^2 \omega_{ped}^2 = \frac{1}{2}J_{eq} \omega_{ped}^2$. D'où $J_{eq} = m_T (R_1 K_t)^2$.

$$\text{A.N. } J_{eq} = 250 \times \left(0,34 \times \frac{42}{12}\right)^2 \Leftrightarrow J_{eq} = 354 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

VI.2 - Simplification du modèle

Question 52 À partir du schéma-bloc donné figure 6.4, déterminer la dimension de $C(p)$. Justifier alors que les grandeurs G_c et G_{ped} sont homogènes.

La grandeur d'entrée du bloc $C(p)$ est un courant tandis que la grandeur de sortie est une tension. $C(p)$ est homogène à des Ohms.

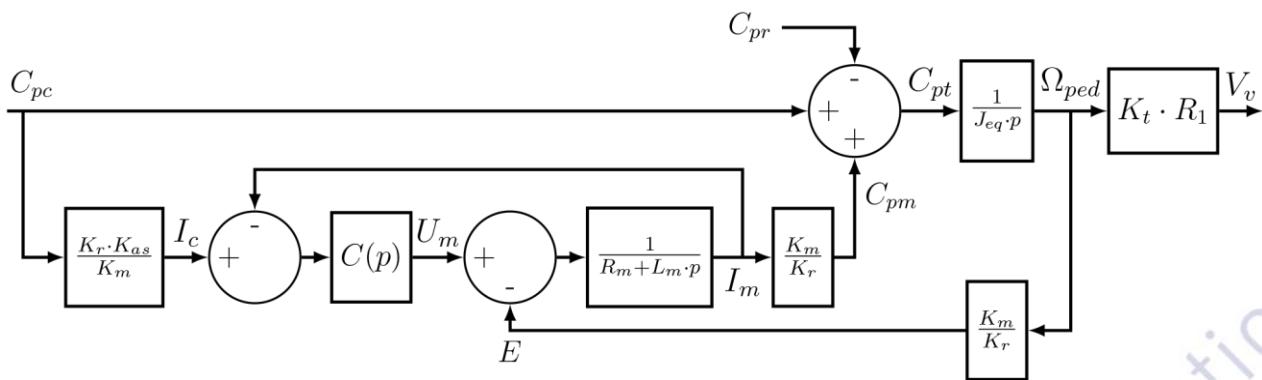
D'après le schéma-bloc de la figure 6.5, on a $G_c(p) = K_{as} \cdot C(p) \cdot C_{pc}(p)$ et $G_{ped}(p) = \left(\frac{K_m}{K_r}\right)^2 \Omega_{ped}(p)$.

$G_c(p)$ s'exprime en $V \cdot A^{-1} \cdot N \cdot m$ et $G_{ped}(p)$ s'exprime en $(N \cdot m / A)(V \cdot s / rad)(rad / s)$, donc $G_{ped}(p)$ s'exprime en $V \cdot A^{-1} \cdot N \cdot m$ comme $G_c(p)$.

Question 53 Déterminer la fonction de transfert $H_G(p) = \frac{C_{pm}(p)}{\Delta G(p)}$ en fonction de $C(p)$, R_m et L_m .

On applique la formule de Black-Nicholls : $H_G(p) = \frac{C_{pm}(p)}{\Delta G(p)} = \frac{\frac{1}{R_m + L_m p}}{1 + \frac{C(p)}{R_m + L_m p}} \Leftrightarrow H_G(p) = \frac{1}{C(p) + R_m + L_m p}$.

Question 54 Déterminer l'expression de $\Delta G(p)$ en fonction de $C_{pc}(p)$, $C_{pm}(p)$ et $C_{pr}(p)$.



D'après le schéma-bloc de la figure 6.4, on peut écrire les relations suivantes :

$$- \Delta G(p) = G_c(p) - G_{ped}(p) ;$$

$$- G_c(p) = K_{as} \cdot C(p) \cdot C_{pc}(p) ;$$

$$- G_{ped}(p) = \left(\frac{K_m}{K_r} \right)^2 \frac{1}{J_{eq}p} \cdot C_{pt}(p) ;$$

$$- C_{pt}(p) = C_{pc}(p) + C_{pm}(p) - C_{pr}(p) ;$$

En remplaçant dans l'équation donnant $\Delta G(p)$, on obtient :

$$\Delta G(p) = G_c(p) - G_{ped}(p) = K_{as} \cdot C(p) \cdot C_{pc}(p) - \left(\frac{K_m}{K_r} \right)^2 \frac{1}{J_{eq}p} \cdot C_{pt}(p) = K_{as} \cdot C(p) \cdot C_{pc}(p) - \left(\frac{K_m}{K_r} \right)^2 \frac{1}{J_{eq}p} [C_{pc}(p) + C_{pm}(p) - C_{pr}(p)]$$

$$\boxed{\Delta G(p) = \left[K_{as} \cdot C(p) - \left(\frac{K_m}{K_r} \right)^2 \frac{1}{J_{eq}p} \right] C_{pc}(p) - \left(\frac{K_m}{K_r} \right)^2 \frac{1}{J_{eq}p} [C_{pm}(p) - C_{pr}(p)]}$$

VI.3 - Correction proportionnelle (P)

Objectif : Évaluer le respect des exigences dans le cas d'une correction proportionnelle

Question 55 En supposant $C_{pr}=0$, déterminer l'expression de la fonction de transfert $H_{as}(p)=\frac{C_{pm}(p)}{C_{pc}(p)}\Big|_{C_{pr}=0}$ en fonction des grandeurs constantes définies dans le tableau 6.1.

On a $C_{pm}(p)=H_G(p)\Delta G(p)$ et $\Delta G(p)=\left[K_{as} \cdot K_c - \left(\frac{K_m}{K_r} \right)^2 \frac{1}{J_{eq}p} \right] C_{pc}(p) - \left(\frac{K_m}{K_r} \right)^2 \frac{1}{J_{eq}p} C_{pm}(p)$ dans le cas où $C(p)=K_c$,

$$C_{pr}(p)=0 \text{ et } H_G(p)=\frac{1}{K_c + R_m + L_m p}.$$

$$\text{D'où } C_{pm}(p)=\left(\frac{1}{K_c + R_m + L_m p} \right) \left[\left(K_{as} \cdot K_c - \left(\frac{K_m}{K_r} \right)^2 \frac{1}{J_{eq}p} \right) C_{pc}(p) - \left(\frac{K_m}{K_r} \right)^2 \frac{1}{J_{eq}p} C_{pm}(p) \right]$$

$$\Leftrightarrow C_{pm}(p) \left[1 + \left(\frac{1}{K_c + R_m + L_m p} \right) \left(\frac{K_m}{K_r} \right)^2 \frac{1}{J_{eq}p} \right] = \left(\frac{1}{K_c + R_m + L_m p} \right) \left(K_{as} K_c - \left(\frac{K_m}{K_r} \right)^2 \frac{1}{J_{eq}p} \right) C_{pc}(p)$$

$$\Leftrightarrow H_{as}(p)=\frac{C_{pm}(p)}{C_{pc}(p)}\Big|_{C_{pr}=0} = \frac{\left(\frac{1}{K_c + R_m + L_m p} \right) \left(K_{as} K_c - \left(\frac{K_m}{K_r} \right)^2 \frac{1}{J_{eq}p} \right)}{\left[1 + \left(\frac{1}{K_c + R_m + L_m p} \right) \left(\frac{K_m}{K_r} \right)^2 \frac{1}{J_{eq}p} \right]} = \frac{K_{as} K_c K_r^2 J_{eq} p - K_m^2}{(K_c + R_m + L_m p) K_r^2 J_{eq} p + K_m^2}$$

$$\Leftrightarrow H_{as}(p) = \frac{-K_m^2 + K_{as}K_cK_r^2J_{eq}p}{K_m^2 + K_r^2J_{eq}(K_c + R_m)p + K_r^2L_mJ_{eq}p^2} \Leftrightarrow H_{as}(p) = -\left(\frac{1 - \frac{K_{as}K_cK_r^2J_{eq}}{K_m^2}p}{1 + \frac{K_r^2}{K_m^2}J_{eq}(K_c + R_m)p + \frac{K_r^2}{K_m^2}L_mJ_{eq}p^2} \right).$$

Question 56 Montrer alors que la correction proportionnelle ne permet pas de satisfaire l'exigence 420 portant sur l'erreur statique.

On applique un échelon de couple d'amplitude C_{p0} $\Rightarrow C_{pc}(p) = \frac{C_{p0}}{p}$.

On applique le théorème de la valeur finale $\lim_{t \rightarrow \infty} c_{pm}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pC_{pm}(p)$ avec $C_{pm}(p) = H_{as}(p)C_{pc}(p)$.

D'où $pC_{pm}(p) = \left[\frac{-K_m^2 + K_{as}K_cK_r^2J_{eq}p}{K_m^2 + K_r^2J_{eq}(K_c + R_m)p + K_r^2L_mJ_{eq}p^2} \right] C_{p0}$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} c_{pm}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pC_{pm}(p) = -C_{p0}$.

Finalement $\lim_{t \rightarrow \infty} [K_{as}C_{p0} - c_{pm}(t)] = K_{as}C_{p0} - \lim_{t \rightarrow \infty} c_{pm}(t) = K_{as}C_{p0} + C_{p0} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} [K_{as}C_{p0} - c_{pm}(t)] = (1 + K_{as})C_{p0}$.

Pour les cinq valeurs de K_{as} , on obtient le tableaux de valeurs suivant :

K_{as}	$0,05K_{as}$	$1+K_{as}$
0	0	1
0,5	0,025	1,5
1	0,05	2
2	0,1	3
4	0,2	5

L'exigence 420 portant sur l'erreur statique, pour une correction proportionnelle, n'est pas respectée car $(1 + K_{as})C_{p0} \geq 0,05K_{as}C_{p0}$.

VI.4 - Correction proportionnelle intégrale (PI)

Objectif : Dimensionner un correcteur proportionnel intégral permettant de satisfaire le cahier des charges

Question 57 Exprimer le dénominateur de $H_{as}(p)$ sous forme canonique et en déduire l'expression de sa pulsation propre ω_0 .

On appelle $D(p)$, le dénominateur de $H_{as}(p)$.

$$D(p) = K_cK_r^2J_{eq} + K_m^2T_i + K_r^2J_{eq}T_i(K_c + R_m)p + K_r^2J_{eq}L_mT_ip^2 = (K_cK_r^2J_{eq} + K_m^2T_i) \left[1 + \frac{K_r^2J_{eq}T_i(K_c + R_m)}{(K_cK_r^2J_{eq} + K_m^2T_i)}p + \frac{K_r^2J_{eq}L_mT_i}{(K_cK_r^2J_{eq} + K_m^2T_i)}p^2 \right]$$

$D(p)$ est un polynôme de degrés 2 qui se met sous la forme $D(p) = K \left[1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right]$.

$$\text{Par identification } \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{K_r^2J_{eq}L_mT_i}{(K_cK_r^2J_{eq} + K_m^2T_i)} \Leftrightarrow \omega_0^2 = \frac{(K_cK_r^2J_{eq} + K_m^2T_i)}{K_r^2J_{eq}L_mT_i} \Leftrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{(K_cK_r^2J_{eq} + K_m^2T_i)}{K_r^2J_{eq}L_mT_i}}$$

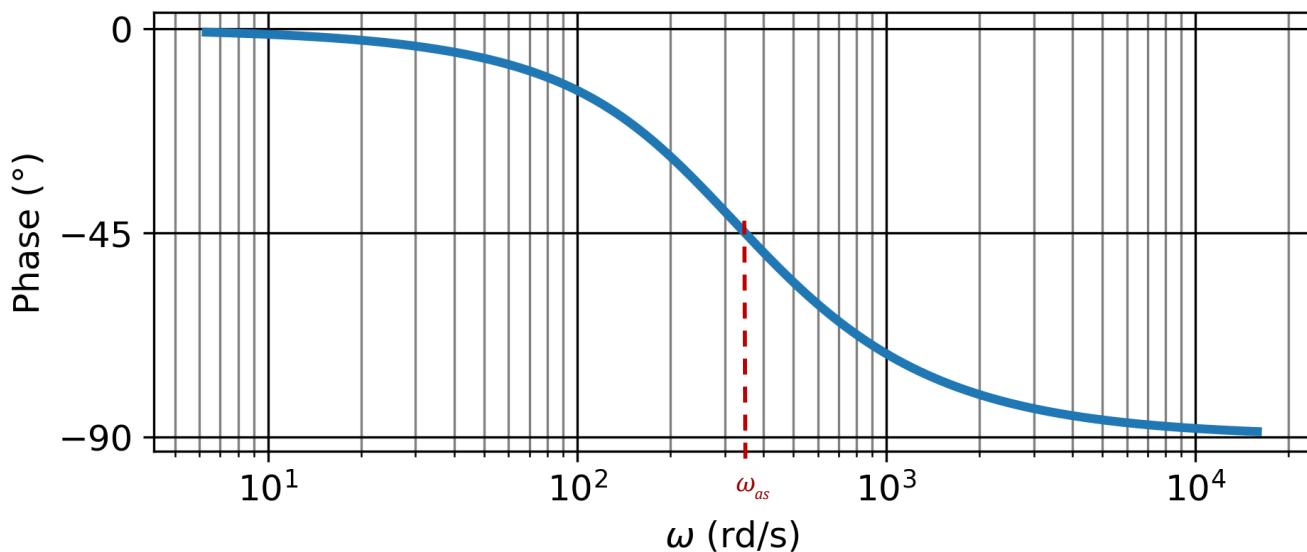
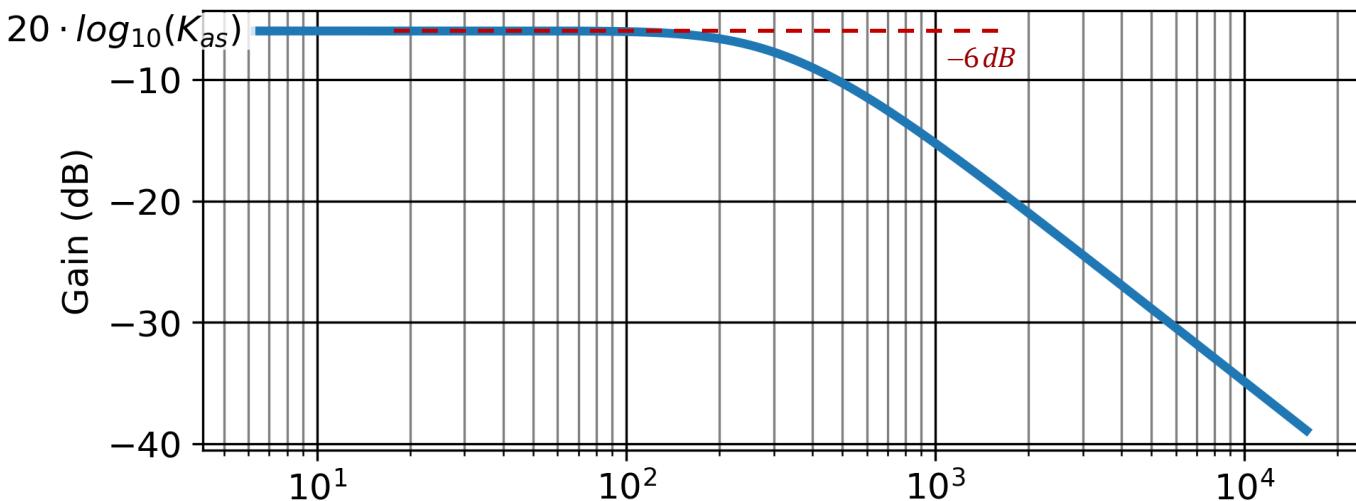
Question 58 Déterminer la valeur du rapport K_c/T_i qui permet d'obtenir $\omega_0 = 252 \text{ rad/s}$.

$$\text{On a } \omega_0^2 = \frac{(K_c K_r^2 J_{eq} + K_m^2 T_i)}{K_r^2 J_{eq} L_m T_i} \Leftrightarrow \omega_0^2 = \frac{K_c}{L_m T_i} + \frac{K_m^2}{K_r^2 J_{eq} L_m} \Leftrightarrow \frac{K_c}{T_i} = L_m \left(\omega_0^2 - \frac{K_m^2}{K_r^2 J_{eq} L_m} \right) \Leftrightarrow \boxed{\frac{K_c}{T_i} = L_m \omega_0^2 - \frac{K_m^2}{K_r^2 J_{eq}}}$$

$$\text{A.N. } \frac{K_c}{T_i} = 7.10^{-4} \times 252^2 - \frac{16.10^{-4}}{\frac{1}{46^2} \times 354} \Leftrightarrow \boxed{\frac{K_c}{T_i} = 44,44 \text{ V} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Question 59 Au regard du diagramme de Bode de la figure 6.7, proposer une forme simplifiée pour la fonction de transfert $H_{as}(p)$.

$$\text{On peut approximer la fonction } H_{as}(p) \text{ par une fonction du 1^{er} ordre : } H_{as}(p) = \frac{K_{as}}{1 + \tau_{as} p} = \frac{K_{as}}{1 + \frac{p}{\omega_{as}}}$$



La gain statique se calcule par $20 \log(K_{as}) = -6 \Leftrightarrow K_{as} = 10^{-\frac{6}{20}} \Leftrightarrow K_{as} = 10^{-\frac{6}{20}} \Leftrightarrow \boxed{K_{as} = 0,5}$.

La pulsation ω_{as} se trouve au milieu de $\omega_1 = 300 \text{ rad/s}$ et de $\omega_2 = 400 \text{ rad/s}$.

Comme l'échelle des abscisses est logarithmique, on a $\log(\omega_{as}) = \frac{\log(\omega_1) + \log(\omega_2)}{2}$.

$$\Leftrightarrow 2\log(\omega_{as}) = \log(\omega_1) + \log(\omega_2) \Leftrightarrow \log(\omega_{as}^2) = \log(\omega_1 \omega_2) \Leftrightarrow \omega_{as}^2 = \omega_1 \omega_2 \Leftrightarrow \boxed{\omega_{as} = \sqrt{\omega_1 \omega_2}} \text{ et } \boxed{\tau_{as} = \frac{1}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}}}.$$

A.N. $\tau_{as} = \frac{1}{\sqrt{300 \times 400}} = 2,9 \text{ ms}$.

Question 60 À partir des figures 6.6 et 6.7, conclure quant au respect des exigences 420, 430 et 440 du diagramme des exigences de la figure 6.2.

D'après la figure 6.6, la valeur finale de C_{pm} est $39,9829 \text{ N}\cdot\text{m}$ pour un échelon en entrée de C_{pc} de $80 \text{ N}\cdot\text{m}$ et une valeur de K_{as} de 0,5.

Cela donne une erreur statique de $0,5 \times 80 - 39,9829 = 0,0171 \text{ N}\cdot\text{m}$.

Soit une erreur statique de $0,04\% < 5\%$. L'exigence 420 est bien respectée.

D'après la figure 6.6, on a un dépassement de 1,6% $\left(\frac{40,6113 - 39,9829}{39,9829} \right)$ lorsque l'on applique un échelon de couple C_{pc} . L'exigence 430 est respectée.

D'après la figure 6.7, on voit que le gain est constant pour les pulsations inférieures ou égales 100 Hz . La bande passante à -2 dB est donc supérieure 100 Hz . L'exigence 440 est respectée.