

## Proposition de corrigé

Concours : **ATS**

Année : **2020**

Filière : **ATS**

Épreuve : **Sciences Industrielles pour l'Ingénieur**

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](#) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles).

**La distribution et la publication de ce document sont strictement interdites !**

### Conditions de diffusion

Ce document n'a pas vocation à être diffusé, et sa consultation est exclusivement réservée aux adhérents de l'UPSTI.

Les adhérents peuvent en revanche s'en inspirer librement pour toute utilisation pédagogique.

Si vous constatez que ce document est disponible en téléchargement sur un site tiers, veuillez s'il vous plaît nous en informer [à cette adresse](#), afin que nous puissions protéger efficacement le travail de nos adhérents.

### Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

L'équipe UPSTI

# ZCA 2000 LGV - Électrification de la traction

Corrigé UPSTI

## 2. Préambule : effet d'un défaut de nivellement

**Objectif :** Mettre en évidence l'effet d'un défaut de nivellement sur les accélérations subies par un train et ses passagers.

**Question 1** Exprimer l'angle  $\delta$  en fonction du défaut de nivellement  $z_d$  et des paramètres géométriques du problème. Calculer les valeurs extrémales de  $\delta$ .

$$\text{Nous avons } \sin\delta = -\frac{z_d}{e} \Leftrightarrow \delta = -\arcsin\left(\frac{z_d}{e}\right)$$

$$\text{Soit } \delta = -\arcsin\left[\frac{A}{e} \cos\left(\frac{2\pi vt}{\lambda}\right)\right].$$

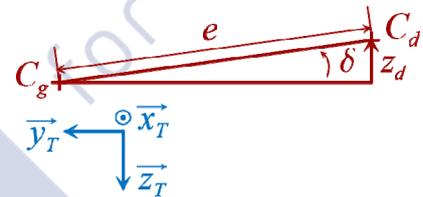


Figure 1 : Calcul de l'angle  $\delta$

Les valeurs extrêmes sont obtenues lorsque le cosinus vaut 1 ou -1.

$$\text{A.N. } \delta_{\max} = \arcsin\left[\frac{A}{e}\right] = \arcsin\left[\frac{5 \cdot 10^{-3}}{1,5}\right] \Leftrightarrow \delta_{\min} = -0,2^\circ \text{ et } \delta_{\max} = 0,2^\circ.$$

**Question 2** Exprimer le vecteur vitesse du point  $G$  dans le mouvement de la caisse par rapport à la Terre  $\overline{V(G, S2/Terre)}$ , en fonction de  $v$ ,  $\delta$  et des paramètres géométriques du problème

$$\overline{V(G, S2/Terre)} = \overline{V(G/Terre)}$$

$$\text{Par définition } \overline{V(G/Terre)} = \left. \frac{d\overline{O_T G}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_T} \text{ avec } \mathcal{R}_T = (O_T, \overline{x_T}, \overline{y_T}, \overline{z_T}) \text{ le repère lié à la Terre.}$$

$$\text{Nous avons } \overline{O_T G} = \overline{O_T C_g} + \overline{C_g G} = v.t.\overline{x_T} - \frac{e}{2}.\overline{y_V} - H.\overline{z_V}.$$

$$\text{De plus } \left. \frac{d\overline{x_T}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_T} = \vec{0}, \left. \frac{d\overline{y_V}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_T} = \delta.\overline{z_V} \text{ et } \left. \frac{d\overline{z_V}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_T} = -\delta.\overline{y_V}.$$

$$\text{D'où } \overline{V(G, S2/Terre)} = v.\overline{x_T} - \frac{e}{2}.\delta.\overline{z_V} + H.\delta.\overline{y_V}.$$

**Attention :** incohérence entre le paramétrage et les données.

**Question 3** Exprimer  $\gamma_v$ , en fonction :

- de  $\delta$ ,  $\ddot{\delta}$  et des paramètres géométriques du problème dans un premier temps ;
- de  $A$ ,  $\lambda$ ,  $v$  et des paramètres géométriques du problème dans un second temps.

$$\text{Par définition } \overline{\Gamma(G/Terre)} = \left. \frac{d\overline{V(G/Terre)}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_T}.$$

$$D'o\grave{u} \overline{\Gamma(G/Terre)} = -\frac{e}{2} \cdot \ddot{\delta} \cdot \overline{z_v} + \frac{e}{2} \cdot \delta^2 \cdot \overline{y_v} + H \cdot \ddot{\delta} \cdot \overline{y_v} + H \cdot \delta^2 \cdot \overline{z_v} = \left(\frac{e}{2} \cdot \delta^2 + H \cdot \ddot{\delta}\right) \cdot \overline{y_v} + \left(H \cdot \delta^2 - \frac{e}{2} \cdot \ddot{\delta}\right) \cdot \overline{z_v}.$$

$$\text{Soit } \gamma_y = \overline{\Gamma(G/Terre)} \cdot \overline{y_v} = \frac{e}{2} \cdot \delta^2 + H \cdot \ddot{\delta}.$$

$$\text{Finalement } \gamma_y = \frac{e}{2} \cdot \left[ \frac{A}{e} \left( \frac{2\pi v}{\lambda} \right) \sin \left( \frac{2\pi v t}{\lambda} \right) \right]^2 + H \cdot \left[ \frac{A}{e} \left( \frac{2\pi v}{\lambda} \right) \cos \left( \frac{2\pi v t}{\lambda} \right) \right].$$

$$\Leftrightarrow \gamma_y = \left( \frac{2\pi v}{\lambda} \right)^2 \frac{A}{e} \left[ \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \left( \frac{2\pi v t}{\lambda} \right) + H \cdot \cos \left( \frac{2\pi v t}{\lambda} \right) \right]$$

**Question 4** En remarquant que  $\left| H \cdot \cos \left( \frac{2\pi v t}{\lambda} \right) \right| \gg \left| \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \left( \frac{2\pi v t}{\lambda} \right) \right|$ , calculer la valeur maximale  $\gamma_y$ . Conclure quant à la compatibilité du défaut de nivellement considéré avec l'exigence de confort des passagers.

$$\text{Comme } \left| H \cdot \cos \left( \frac{2\pi v t}{\lambda} \right) \right| \gg \left| \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \left( \frac{2\pi v t}{\lambda} \right) \right|, \text{ nous obtenons } \gamma_y = \left( \frac{2\pi v}{\lambda} \right)^2 \frac{A \cdot H}{e} \cdot \cos \left( \frac{2\pi v t}{\lambda} \right).$$

$$D'o\grave{u} \gamma_{y_{max}} = \left( \frac{2\pi v}{\lambda} \right)^2 \frac{A \cdot H}{e} \text{ (obtenu lorsque } \cos \left( \frac{2\pi v t}{\lambda} \right) = 1 \text{ )}.$$

$$\text{A.N. } \gamma_{y_{max}} = \left( \frac{2\pi \times 300 \times \frac{1}{3,6}}{20} \right)^2 \frac{5 \cdot 10^{-3} \times 2}{1,5} \Leftrightarrow \gamma_{y_{max}} = 4,57 \text{ m/s}^2.$$

L'exigence confort des passagers n'est pas respectée. Il faut donc corriger la géométrie de la voie.

### 3. Pré-dimensionnement de la chaîne d'énergie de la bourreuse

#### 3.1 - Architecture d'hybridation

**Objectif :** Choisir l'architecture d'hybridation de la bourreuse.

##### 3.1.a - Respect de l'exigence 12

**Question 5** Dans le cas de l'architecture conventionnelle de la bourreuse, exprimer la puissance mécanique délivrée par le moteur à combustion interne ( $P_{MCI}$ ) en fonction des données du tableau 1. Calculer sa valeur.

Dans le cas de l'architecture conventionnelle, la chaîne d'énergie nécessaire au mode circulation peut être représentée par la figure 2 avec  $\eta_{emb} = 1$ .

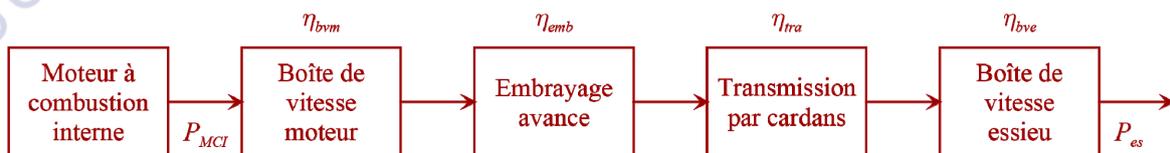


Figure 2 : chaîne d'énergie du mode circulation pour l'architecture conventionnelle

$$\text{La relation liant les puissances } P_{MCI} \text{ et } P_{es} \text{ est : } P_{es} = \eta_{bvm} \cdot \eta_{emb} \cdot \eta_{tra} \cdot \eta_{bve} \cdot P_{MCI}, \text{ d'o\grave{u} } P_{MCI} = \frac{P_{es}}{\eta_{bvm} \cdot \eta_{emb} \cdot \eta_{tra} \cdot \eta_{bve}}.$$

$$\text{A.N. } P_{MCI} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,96 \times 1 \times 0,98 \times 0,98} \Leftrightarrow P_{MCI} = 433,85 \text{ kW}.$$

**Question 6** Dans le cas de l'architecture hybride série, exprimer la puissance mécanique délivrée par le moteur à combustion interne ( $P_{MCI}$ ) en fonction des données du tableau 1. Calculer sa valeur.

Dans le cas de l'architecture hybride série, la chaîne d'énergie nécessaire au mode circulation peut être représentée par la figure 3 avec  $\eta_{bus} = 1$ .

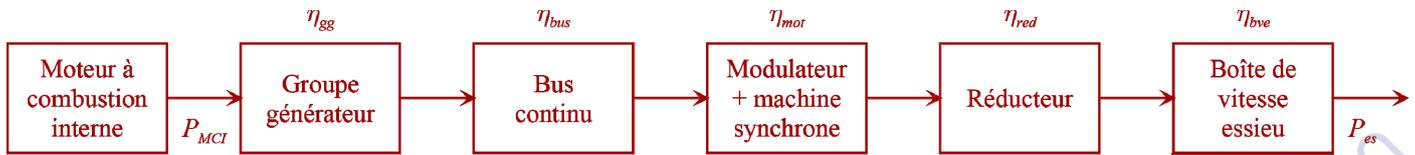


Figure 3 : chaîne d'énergie du mode circulation pour l'hybridation série

La relation liant les puissances  $P_{MCI}$  et  $P_{es}$  est :  $P_{es} = \eta_{gg} \cdot \eta_{bus} \cdot \eta_{mot} \cdot \eta_{red} \cdot \eta_{bve} \cdot P_{MCI}$ , d'où  $P_{MCI} = \frac{P_{es}}{\eta_{gg} \cdot \eta_{bus} \cdot \eta_{mot} \cdot \eta_{red} \cdot \eta_{bve}}$ .

A.N.  $P_{MCI} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,92 \times 1 \times 0,90 \times 0,96 \times 0,98} \Leftrightarrow P_{MCI} = 513,5 \text{ kW}$ .

**Question 7** Dans le cas de l'architecture hybride parallèle, exprimer la puissance mécanique délivrée par le moteur à combustion interne ( $P_{MCI}$ ) en fonction des données du tableau 1. Calculer sa valeur.

Dans le cas de l'architecture hybride parallèle, la chaîne d'énergie nécessaire au mode circulation est identique à celle de l'architecture conventionnelle.

Nous avons donc  $P_{MCI} = \frac{P_{es}}{\eta_{bvm} \cdot \eta_{emb} \cdot \eta_{tra} \cdot \eta_{bve}}$ . A.N.  $P_{MCI} = 433,85 \text{ kW}$ .

**Question 8** Conclure quant au choix de l'architecture d'hybridation qui permet de satisfaire l'exigence 12 du diagramme des exigences donné figure 7.

L'exigence 12 du diagramme des exigences impose de ne pas augmenter de plus de 2% la consommation énergétique à vitesse maximale. Or pour l'hybridation série le moteur à combustion interne fournit une puissance de 533,5 kW, soit 28,5% de puissance en plus par rapport à l'architecture conventionnelle. On choisira donc l'hybridation parallèle pour laquelle la puissance fournie par le moteur à combustion interne est identique au cas de l'architecture conventionnelle.

### 3.2 - Dimensionnement de la batterie

**Objectif :** Calculer la capacité de la batterie qui permet de satisfaire l'exigence 100 (« Autonomie »).

**Question 9** Déterminer la relation qui lie la puissance transférée à l'essieu ( $P_{es}$ ) à la puissance absorbée par l'association {Machine + Modulateur} ( $P_{mod}$ ) et les rendements de la chaîne d'énergie dans les cas où :

1. la machine est utilisée pour la traction de la bourreuse ( $P_{mod} > 0$ ) ;
2. la machine est utilisée pour freiner la bourreuse ( $P_{mod} < 0$ ) .

Lors de la traction de la bourreuse, la chaîne d'énergie peut être représentée par la figure 4.

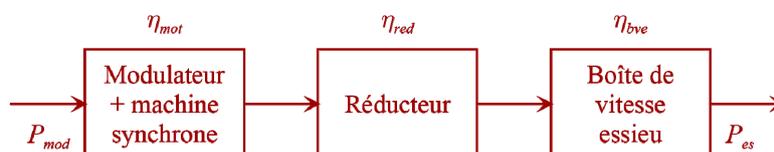


Figure 4 : chaîne d'énergie lors de la traction

La relation liant les puissances  $P_{mod}$  et  $P_{es}$  est :  $P_{es} = \eta_{mot} \cdot \eta_{red} \cdot \eta_{bve} \cdot P_{mod}$ .

Lors du freinage de la bourreuse, la chaîne d'énergie peut être représentée par la figure 5.

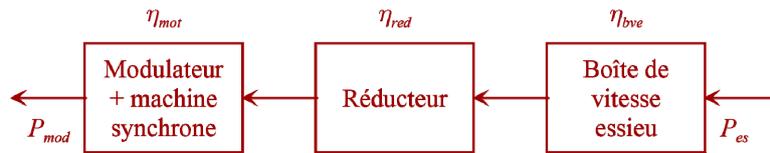


Figure 4 : chaîne d'énergie lors du freinage

La relation liant les puissances  $P_{mod}$  et  $P_{es}$  est :  $P_{mod} = \eta_{mot} \cdot \eta_{red} \cdot \eta_{bve} \cdot P_{es}$ , d'où  $P_{es} = \frac{P_{mod}}{\eta_{mot} \cdot \eta_{red} \cdot \eta_{bve}}$ .

**Question 10** Calculer la vitesse maximale  $v_1$  atteinte par la bourreuse au cours de son déplacement.

La vitesse étant la dérivée de la position, la distance  $d_2$  représente l'aire sous la courbe de la figure 5.

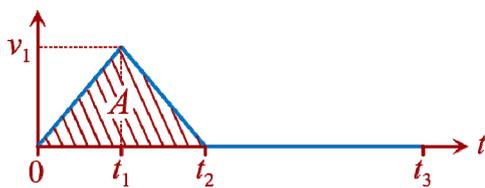


Figure 5 : vitesse de la bourreuse

Les accélérations entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  étant opposées, nous avons

$$t_1 = \frac{t_2}{2}$$

L'aire sous la courbe vaut  $A = d_2 = v_1 \cdot t_1 = v_1 \cdot \frac{t_2}{2} \Leftrightarrow v_1 = \frac{2d_2}{t_2}$ .

A.N.  $v_1 = \frac{2 \times 60 \cdot 10^{-2}}{3} \Leftrightarrow v_1 = 0,4 \text{ m/s}$ .

**Question 11** Calculer l'énergie cinétique  $\epsilon_{cl}$  accumulée par la bourreuse à la date  $t_1$ . En déduire l'énergie électrique  $\epsilon_{el}$  consommée par l'association {Modulateur + Machine} entre l'instant initial ( $t = 0$ ) et l'instant  $t_1$ .

La bourreuse étant assimilé à un solide ayant un mouvement de translation, son énergie cinétique à l'instant  $t_1$  est donnée par

$$\epsilon_{cl} = \frac{1}{2} M_b v_1^2$$

A.N.  $\epsilon_{cl} = \frac{1}{2} \times 63 \cdot 10^3 \times 0,4^2 \Leftrightarrow \epsilon_{cl} = 5040 \text{ J}$ .

Les rendements étant supposés constant quel que soit le sens de transfert de l'énergie et la puissance étant la dérivée de l'énergie par rapport au temps, nous avons  $\epsilon_{cl} = \eta_{mot} \cdot \eta_{red} \cdot \eta_{bve} \cdot \epsilon_{el} \Leftrightarrow \epsilon_{el} = \frac{\epsilon_{cl}}{\eta_{mot} \cdot \eta_{red} \cdot \eta_{bve}}$ .

A.N.  $\epsilon_{el} = \frac{5040}{0,90 \times 0,96 \times 0,98} \Leftrightarrow \epsilon_{el} = 5952,4 \text{ J}$ .

**Question 12** Calculer l'énergie électrique  $\epsilon_{e2}$  envoyée par l'association {Modulateur + Machine} vers le bus continu entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ .

Pendant la phase 2, qui est une phase de freinage, la bourreuse renvoie l'énergie cinétique emmagasinée pendant la phase 1, nous avons  $\epsilon_{e2} = \eta_{mot} \cdot \eta_{red} \cdot \eta_{bve} \cdot \epsilon_{cl}$ .

A.N.  $\epsilon_{e2} = 0,90 \times 0,96 \times 0,98 \times 5040 \Leftrightarrow \epsilon_{e2} = 4267,5 \text{ J}$ .

**Question 13** Calculer alors l'énergie électrique consommée par l'association {Modulateur + Machine} au cours du déplacement de la bourreuse. En déduire la valeur moyenne de la puissance  $P_{mod}$  (puissance électrique consommée par l'association {Modulateur + Machine}).

L'énergie consommée  $\epsilon_{e12}$  par l'association {Modulateur + Machine} au cours du déplacement de la bourreuse est donnée par  $\epsilon_{e12} = \epsilon_{e1} - \epsilon_{e2}$ .

A.N.  $\epsilon_{e12} = 5952,4 - 4267,5 \Leftrightarrow \boxed{\epsilon_{e12} = 1684,9 J}$ .

Pour obtenir la puissance moyenne  $\langle P_{mod} \rangle$  consommée par l'association {Modulateur + Machine} au cours du déplacement, il suffit de diviser l'énergie consommée  $\epsilon_{e12}$  par la durée du déplacement  $t_2$  :  $\langle P_{mod} \rangle = \frac{\epsilon_{e12}}{t_2}$ .

A.N.  $\langle P_{mod} \rangle = \frac{1684,9}{3} \Leftrightarrow \boxed{\langle P_{mod} \rangle = 561,6 W}$ .

*Remarque* : nous avons considéré que la question concernait les phases 1 et 2.

**Question 14** Calculer la capacité de la batterie (quantité d'énergie emmagasinée) à installer pour permettre le fonctionnement en mode travail pendant 6 heures (exigence 100, figure 7). Exprimer cette capacité en kilowatt-heure (kW.h)

L'énergie nécessaire au déplacement lors d'un bond est  $\epsilon_{e12} = 1684,9 J$ . L'énergie consommée par l'ensemble groupe hydraulique et armoire électrique lors d'un bond est  $\epsilon_{ghae} = (P_{gh} + P_{ae})t_3$  compte-tenu de l'hypothèse que ces puissances sont constantes.

L'énergie fournie par la batterie lors d'un bond est  $\epsilon_{bat} = \epsilon_{e12} + \epsilon_{ghae}$ .

Pour avoir une autonomie de 6 h, il faut réaliser 2160 bonds  $\left(\frac{6 \times 3600 s}{10 s}\right)$ .

La batterie doit donc stocker au minimum une énergie de  $2160\epsilon_{bat}$ .

A.N.  $2160\epsilon_{bat} = 2160[1684,9 + (54 + 10) \times 10^3 \times 10] \Leftrightarrow 2160\epsilon_{bat} = 1386039384 J$

Soit  $\boxed{385 kW.h}$  ( $1 kW.h = 1000 \times 3600 J$ ).

*Autre méthode* : Lorsque la bourreuse se déplace, elle ne travaille pas. Les puissances  $P_{gh}$  (groupe hydraulique) et  $P_{ae}$  (armoire électrique) correspondent aux puissances consommées en mode travail. Lors du déplacement le groupe hydraulique fonctionne et consomme une puissance beaucoup moins importante.

La puissance moyenne délivrée par la batterie pendant un bond, de durée  $t_3$ , est représentée sur la figure 6.

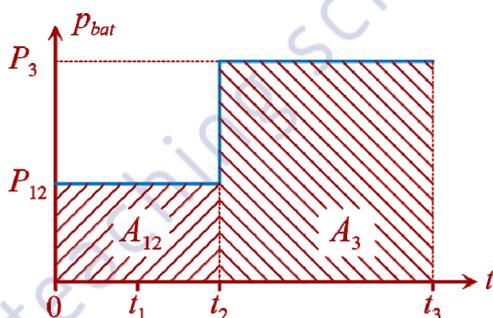


Figure 6 : puissance délivrée par la batterie

$P_{12}$  représente la puissance moyenne consommée par l'association {Modulateur + Machine} au cours du déplacement,  $P_{12} = \langle P_{mod} \rangle$ .

$P_3$  représente la puissance moyenne consommée pendant l'opération de bourrage,  $P_3 = P_{gh} + P_{ae}$  (la puissance  $P_{cp}$  est négligée).

Pour calculer l'énergie moyenne  $\epsilon_{bat}$  délivrée par la batterie nécessaire à un bond, nous utilisons la méthode des aires.

$\epsilon_{bat} = P_{bat} \cdot t_3 = A_{12} + A_3 \Leftrightarrow \boxed{\epsilon_{bat} = \langle P_{mod} \rangle \cdot t_2 + (P_{gh} + P_{ae})(t_3 - t_2)}$ .

A.N.  $\epsilon_{bat} = 561,6 \times 3 + 64 \cdot 10^3 \times 7 \Leftrightarrow \boxed{\epsilon_{bat} = 449284 W.s}$ , soit  $\boxed{\epsilon_{bat} = 0,1248 kW.h}$ .

Pour avoir une autonomie de 6 h, il faut réaliser 2160 bonds  $\left(\frac{6 \times 3600 s}{10 s}\right)$ .

La batterie doit donc stocker au minimum une énergie de  $2160\epsilon_{bat}$ , soit  $\boxed{269,6 kW.h}$ .

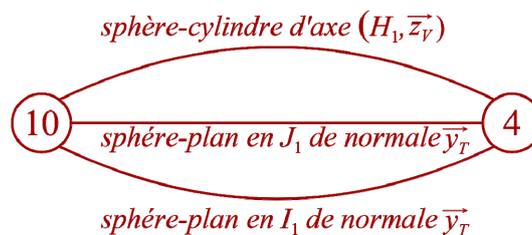
## 4. Dimensionnement de la motorisation électrique

### 4.2 - Étude de la motricité de la bourreuse

**Objectif :** Déterminer le nombre d'essieu à pourvoir d'une motorisation électrique.

#### 4.2.b - Modélisation de la suspension

**Question 15** Tracer le graphe d'architecture de la liaison existant entre le châssis de bogie 4 et le châssis de caisse 10. Il est rappelé que les éléments déformables ne sont pas considérés.



**Question 16** Par la méthode de votre choix, déterminer les degrés de libertés offerts par la liaison équivalente aux trois liaisons qui existent entre le châssis de bogie 4 et le châssis de caisse 10.

Comme les liaisons possèdent beaucoup de degrés de liberté, nous choisissons la méthode statique pour utiliser le minimum de variables.

Torseur d'action mécanique de la liaison sphère-cylindre d'axe  $(H_1, \vec{z}_V)$  :  $\{\mathcal{F}(4 \rightarrow 10)^{sc}\} = \begin{Bmatrix} X^{sc} & 0 \\ Y^{sc} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{H_1, R_V}$  . avec

$\mathcal{R}_V = (O, \vec{x}_V, \vec{y}_T, \vec{z}_V)$  le repère lié à la voie.

Torseur d'action mécanique de la liaison sphère-plan en  $I_1$  de normale  $\vec{y}_T$  :  $\{\mathcal{F}(4 \rightarrow 10)^{pl}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y^{pl} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{I_1, R_V}$  .

Torseur d'action mécanique de la liaison sphère-plan en  $J_1$  de normale  $\vec{y}_T$  :  $\{\mathcal{F}(4 \rightarrow 10)^{pj}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y^{pj} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{J_1, R_V}$  .

Nous exprimons tous les torseurs au point  $H_1$  puisque les torseurs exprimés aux points  $I_1$  et  $J_1$  ont moins de variables dans leurs résultantes que le torseur exprimé au point  $H_1$ .

$$\overline{\mathcal{M}}_{H_1, 4 \rightarrow 10}^{pl} = \overline{\mathcal{M}}_{I_1, 4 \rightarrow 10}^{pl} + \overline{H_1 I_1} \wedge Y^{pl} \vec{y}_V = (a\vec{x}_V - b\vec{z}_V) \wedge Y^{pl} \vec{y}_V = aY^{pl} \vec{z}_V + bY^{pl} \vec{x}_V$$

$$\overline{\mathcal{M}}_{H_1, 4 \rightarrow 10}^{pj} = \overline{\mathcal{M}}_{J_1, 4 \rightarrow 10}^{pj} + \overline{H_1 J_1} \wedge Y^{pj} \vec{y}_V = (a\vec{x}_V + b\vec{z}_V) \wedge Y^{pj} \vec{y}_V = aY^{pj} \vec{z}_V - bY^{pj} \vec{x}_V$$

Comme les trois liaisons sont en parallèle, nous sommes les torseurs d'action mécanique :

$$\{\mathcal{F}(4 \rightarrow 10)^{eq}\} = \{\mathcal{F}(4 \rightarrow 10)^{sc}\} + \{\mathcal{F}(4 \rightarrow 10)^{pl}\} + \{\mathcal{F}(4 \rightarrow 10)^{pj}\}.$$

$$\text{Soit } \{\mathcal{F}(4 \rightarrow 10)^{eq}\} = \begin{Bmatrix} X^{sc} & 0 \\ Y^{sc} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{H_1, R_V} + \begin{Bmatrix} 0 & bY^{pl} \\ Y^{pl} & 0 \\ 0 & aY^{pl} \end{Bmatrix}_{H_1, R_V} + \begin{Bmatrix} 0 & -bY^{pj} \\ Y^{pj} & 0 \\ 0 & aY^{pj} \end{Bmatrix}_{H_1, R_V} .$$

$$\text{D'où } \left\{ \mathcal{F}(4 \rightarrow 10)^{eq} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} X^{sc} & b(Y^{pl} - Y^{pJ}) \\ Y^{sc} + Y^{pl} + Y^{pJ} & 0 \\ 0 & a(Y^{pl} + Y^{pJ}) \end{array} \right\}_{H_1, R_V}$$

Les degrés de liberté offerts par la liaison équivalente aux trois liaisons qui existent entre le châssis de bogie 4 et le châssis de caisse 10 sont au nombre de deux : la translation selon la direction  $\vec{z}_V$  et la rotation autour de l'axe  $(H_1, \vec{y}_T)$ .

**Question 17** Déterminer l'expression de  $F_g + F_d$  en fonction de  $Z_{01}$ ,  $M_e$  et de  $\theta$ .

Nous isolons les solides  $\{4+1\}$ .

BAME :

- $0 \rightarrow 1 : \left\{ \mathcal{F}(0 \rightarrow 1) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{01} \vec{x}_V + Z_{01} \vec{z}_V \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{E_1}$  ;
- $10 \rightarrow 4 : \left\{ \mathcal{F}(10 \rightarrow 4) \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{104} & L_{104} \\ Y_{104} & 0 \\ 0 & N_{104} \end{array} \right\}_{H_1, R_V}$  ;
- Ressort gauche  $\rightarrow 1 : \left\{ \mathcal{F}(7g \rightarrow 4) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} F_g \vec{z}_V \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{F_{1g}}$  ;
- Ressort droit  $\rightarrow 1 : \left\{ \mathcal{F}(7d \rightarrow 4) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} F_d \vec{z}_V \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{F_{1d}}$  ;
- Pesanteur  $\rightarrow 1 : \left\{ \mathcal{F}(pes \rightarrow 1) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} M_e g \vec{z}_T \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_1}$  en notant  $G_1$  le centre de gravité de 1.

Nous utilisons le PFD en résultante sur  $\vec{z}_V$  pour ne pas faire apparaître les inconnues de liaison de la liaison équivalente entre 10 et 4. Le sujet indique que la bourreuse a un mouvement de translation rectiligne sur  $\vec{x}_V$  donc l'accélération sur  $\vec{z}_V$  est nulle.

Nous obtenons alors  $Z_{01} + F_g + F_d + M_e g \vec{z}_T \cdot \vec{z}_V = 0$  soit  $F_g + F_d = -Z_{01} - M_e g \cos \theta$ .

#### 4.2.c - Efforts exercés par chacun des ressorts

**Question 18** À l'aide du principe fondamental de la dynamique, déterminer les expressions :

- de la différence  $Z_9 - Z_7$  et
  - de la somme  $Z_7 + Z_8 + Z_9$
- en fonction de  $\gamma$ ,  $\theta$ ,  $M_e$ ,  $g$ ,  $h$  et  $\ell$ .

Nous isolons le solide  $\{10\}$ .

BAME :

Avec les hypothèses du sujet, nous avons :

- $7 \rightarrow 10 : \left\{ \mathcal{F}(7 \rightarrow 10) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} X_7 \vec{x}_V + Z_7 \vec{z}_V \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{D_7}$  ;
- $8 \rightarrow 10 : \left\{ \mathcal{F}(8 \rightarrow 10) \right\} = \left\{ \begin{array}{c} X_8 \vec{x}_V + Z_8 \vec{z}_V \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{D_8}$  ;

$$\begin{aligned}
 - \quad 9 \rightarrow 10 : \{ \mathcal{F}(9 \rightarrow 10) \} &= \left\{ \begin{array}{c} X_9 \vec{x}_V + Z_9 \vec{z}_V \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{D_9} ; \\
 - \quad \text{Pesanteur} \rightarrow 10 : \{ \mathcal{F}(\text{pes} \rightarrow 10) \} &= \left\{ \begin{array}{c} M_c g \vec{z}_T \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_c} .
 \end{aligned}$$

Nous appliquons le PFD en résultante sur  $\vec{z}_V$  :  $Z_7 + Z_8 + Z_9 + M_c g \vec{z}_T \cdot \vec{z}_V = 0$ .

(Comme précédemment, nous utilisons l'hypothèse que la bourreuse a un mouvement de translation rectiligne sur  $\vec{x}_V$  et donc l'accélération sur  $\vec{z}_V$  est nulle.)

Nous obtenons  $Z_7 + Z_8 + Z_9 = -M_c g \cos \theta$ .

Nous appliquons le PFD en moment en  $D_2$  sur  $\vec{y}_V$ . Pour cela, nous commençons par déplacer tous les torseurs d'action mécanique en  $D_2$ .

$$\overline{M(D_2, 7 \rightarrow 10)} = \overline{M(D_1, 7 \rightarrow 10)} + \overline{D_2 D_1} \wedge (X_7 \vec{x}_V + Z_7 \vec{z}_V) = \ell \vec{x}_V \wedge (X_7 \vec{x}_V + Z_7 \vec{z}_V) = -\ell Z_7 \vec{y}_V .$$

$$\overline{M(D_2, 9 \rightarrow 10)} = \overline{M(D_3, 9 \rightarrow 10)} + \overline{D_2 D_3} \wedge (X_9 \vec{x}_V + Z_9 \vec{z}_V) = -\ell \vec{x}_V \wedge (X_9 \vec{x}_V + Z_9 \vec{z}_V) = \ell Z_9 \vec{y}_V .$$

$$\overline{M(D_2, \text{pes} \rightarrow 10)} = \overline{M(G_c, \text{pes} \rightarrow 10)} + \overline{D_2 G_c} \wedge M_c g \vec{z}_T = -h \vec{z}_V \wedge M_c g \vec{z}_T = h M_c g \sin \theta \vec{y}_V .$$

Nous considérons d'après le sujet que le châssis reste parallèle à la voie donc  $\overline{\delta_{G_c, 10/R_g}} = \vec{0}$ .

$$\overline{\delta_{D_2, 10/R_g}} = \overline{\delta_{G_c, 10/R_g}} + \overline{D_2 G_c} \wedge M_c \gamma \vec{x}_V = -h \vec{z}_V \wedge M_c \gamma \vec{x}_V = -h M_c \gamma \vec{y}_V .$$

Nous pouvons maintenant appliquer le PFD en moment en  $D_2$  sur  $\vec{y}_V$  :  $-h M_c \gamma = \ell (Z_9 - Z_7) + h M_c g \sin \theta$ .

Finalement  $Z_9 - Z_7 = -\frac{h}{\ell} M_c (\gamma + g \sin \theta)$ .

**Question 19** Déduire de la question précédente et des hypothèses que  $Z_7 \approx Z_8 \approx Z_9$ . En déduire la valeur de ces composantes.

Nous réalisons l'application numérique à partir des deux expressions obtenues précédemment.

$$Z_7 + Z_8 + Z_9 = -61.10^3 \times 10 \times \cos \left[ \arctan \left( \frac{40}{1000} \right) \right] = -609,5 \text{ kN} .$$

La valeur de la différence  $Z_9 - Z_7$  dépend de l'accélération. La différence est maximale pour l'accélération

$$\text{maximale : } Z_9 - Z_7 = -\frac{1}{10} 61.10^3 \left[ 0,5 + 10 \times \sin \left( \arctan \left( \frac{40}{1000} \right) \right) \right] = -5,5 \text{ kN}$$

$Z_7, Z_8$  et  $Z_9$  sont d'après l'analyse de la situation toutes négatives.

La différence entre  $Z_9$  et  $Z_7$  est très inférieure au tiers de la somme  $Z_7 + Z_8 + Z_9$  en valeurs absolues. On peut donc supposer que  $Z_9 \approx Z_7$ . Comme d'après le sujet on a  $|Z_9| > |Z_8| > |Z_7|$ , nous avons bien  $Z_7 \approx Z_8 \approx Z_9$ .

De plus,  $Z_7 \approx Z_8 \approx Z_9 = \frac{-609.10^3}{3} = -203 \text{ kN}$  ce qui correspond bien à la valeur donnée dans la suite du sujet.

### 4.2.d - Nombre d'essieux à motoriser

**Question 20** À l'aide du principe fondamental de la dynamique appliqué à la bourreuse, déterminer l'expression de l'effort, de traction  $F_p$  permettant d'imposer une accélération  $\gamma$  à la bourreuse engagée dans une pente d'inclinaison  $\theta$ . Faire l'application numérique dans le cas de la configuration étudiée (voir tableau 2).

Nous isolons la bourreuse  $\{10 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6\}$ .

BAME :

$$- \quad 0 \rightarrow 1 : \{ \mathcal{F}(0 \rightarrow 1) \} = \left\{ \begin{array}{c} X_{01} \vec{x}_V + Z_{01} \vec{z}_V \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{E_1} ;$$

$$- 0 \rightarrow 2 : \{ \mathcal{F}(0 \rightarrow 2) \} = \left\{ \begin{array}{c} X_{02} \overline{x_V} + Z_{02} \overline{z_V} \\ \overline{0} \end{array} \right\}_{E_2} ;$$

$$- 0 \rightarrow 3 : \{ \mathcal{F}(0 \rightarrow 3) \} = \left\{ \begin{array}{c} X_{03} \overline{x_V} + Z_{03} \overline{z_V} \\ \overline{0} \end{array} \right\}_{E_3} ;$$

$$- \text{pesanteur} \rightarrow \{10+1+2+3\} : \{ \mathcal{F}(\text{pes} \rightarrow 10+1+2+3) \} = \left\{ \begin{array}{c} M_b g \overline{z_T} \\ \overline{0} \end{array} \right\}_{G_b} \text{ en notant } G_b \text{ le centre de gravité de la}$$

bourreuse.

L'effort de traction  $F_p$  correspond à  $X_{01} + X_{02} + X_{03}$ , comme indiqué dans le sujet.

Nous appliquons donc le PFD en résultante sur  $\overline{x_V}$ .

Nous obtenons alors  $X_{01} + X_{02} + X_{03} + M_b g \overline{z_T} \cdot \overline{x_V} = M_b \gamma$  soit  $F_p = M_b (\gamma + g \sin \theta)$ .

$$\text{A.N. : } F_p = 63.10^3 \times \left[ 0,5 + 10 \sin \left( \arctan \left( \frac{40}{1000} \right) \right) \right] \Leftrightarrow F_p = 56,7 \text{ kN}.$$

**Question 21** Déterminer l'expression de l'effort tangentiel transmissible par la voie sur chacun des essieux Réaliser l'application numérique dans le cas de la configuration étudiée.

D'après le tableau 2, nous avons  $f_{min} = 0,1$  donc l'effort tangentiel transmissible est  $f_{min} |Z_{0i}| = 20,3 \text{ kN}$ .

**Question 22** Conclure quant au nombre d'essieux qu'il faut motoriser pour satisfaire les exigences du diagramme de la figure 13.

D'après les deux questions précédentes, il faut donc motoriser 3 essieux  $\left( \frac{56,7}{20,3} = 2,8 \right)$  pour satisfaire les exigences du diagramme de la figure 13.

### 4.3 - Dimensionnement des modulateurs

**Objectif :** Déterminer le courant maximal absorbé par les machines de traction électrique ainsi que la tension maximale à appliquer à leurs bornes.

#### 4.3.a - Modélisation et détermination des paramètres de la machine

**Question 23** À partir des données constructeur, exprimer et calculer pour le point de fonctionnement nominal :

- la valeur efficace  $V_n$  de la tension d'alimentation  $V$  d'une phase de la machine ;
- la puissance mécanique  $P_m$  délivrée par la machine ;
- la puissance électrique active  $P_{abs}$  qu'elle absorbe.

La valeur efficace de la tension composée du réseau étant  $U_n = 400 \text{ V}$ , la valeur efficace de la tension simple

$$V_n = 230 \text{ V} \quad (V_n = U_n / \sqrt{3}).$$

La puissance mécanique  $P_m$  de la machine correspond à la puissance nominale  $P_n$  de la machine :

$$P_m = P_n = 23 \text{ kW}.$$

La puissance active absorbée  $P_{abs}$  par la machine est donnée par  $P_{abs} = \frac{P_m}{\eta}$ .

$$\text{A.N. } P_{abs} = \frac{23.10^3}{0,94} \Leftrightarrow P_{abs} = 24,5 \text{ kW}.$$

**Question 24** Déduire de la question précédente :

- le facteur de puissance de la machine à son point de fonctionnement nominal  $\cos(\varphi_n)$  ;
- la résistance  $R$  d'une phase d'induit.

La puissance active absorbée  $P_{abs}$  est donnée par  $P_{abs} = \sqrt{3}U_n I_n \cos(\varphi_n) \Leftrightarrow \cos(\varphi_n) = \frac{P_{abs}}{\sqrt{3}U_n I_n}$ .

$$\text{A.N. } \cos(\varphi_n) = \frac{24,5 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \times 400 \times 42,9} \Leftrightarrow \boxed{\cos(\varphi_n) = 0,82}$$

Comme seules sont prises en compte les pertes joule  $P_{JR}$  (pertes cuivre), le bilan des puissances s'écrit au point de fonctionnement nominal :  $P_{abs} = P_{JR} + P_m$  avec  $P_{JR} = 3RI_n^2$  (couplage étoile) et  $P_{abs} = \frac{P_m}{\eta} = \frac{P_n}{\eta}$ .

$$\text{D'où } P_{JR} = 3RI_n^2 = \frac{P_n}{\eta} - P_n \Leftrightarrow \boxed{R = \frac{P_n}{3I_n^2} \left( \frac{1}{\eta} - 1 \right)}$$

$$\text{A.N. } R = \frac{23 \cdot 10^3}{3 \times 42,9^2} \left( \frac{1}{0,94} - 1 \right) \Leftrightarrow \boxed{R = 0,27 \Omega}$$

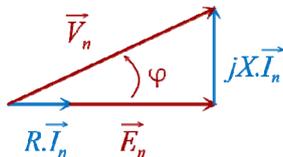
**Question 25** Calculer la valeur de la puissance réactive  $Q_{abs}$  absorbée par la machine à son point de fonctionnement nominal.

La puissance réactive absorbée  $Q_{abs}$  est donnée par  $Q_{abs} = P_{abs} \tan(\varphi_n)$  avec  $\tan(\varphi_n) > 0$  (le moteur est une charge de nature inductive).

$$\text{A.N. } Q_{abs} = 24,5 \cdot 10^3 \times \tan[\text{Arcos}(0,82)] \Leftrightarrow Q_{abs} = 17,1 \text{ kVAR}$$

**Question 26** Exprimer la puissance réactive  $Q_{abs}$  absorbée par la machine en fonction notamment de la réactance cyclique  $X$ . En déduire la valeur de l'inductance cyclique  $L$ .

Pour un angle d'autopilotage nul  $\psi = 0$  ( $\underline{E}$  et  $\underline{I}$  sont en phase), le diagramme de Fresnel est donné figure 7.



La loi des mailles permet d'écrire :  $\vec{V}_n = R\vec{I}_n + jX\vec{I}_n + \vec{E}_n$ .

En projetant cette équation vectorielle sur le vecteur  $jX\vec{I}_n$ , nous obtenons :  $V_n \sin(\varphi) = XI_n$ .

Figure 7 : diagramme de Fresnel pour  $\psi = 0$

La puissance réactive  $Q_{abs}$  est donnée par  $Q_{abs} = 3V_n I_n \sin(\varphi_n) \Leftrightarrow \boxed{Q_{abs} = 3XI_n^2}$ .

$$\text{D'où } X = L\omega = \frac{Q_{abs}}{3I_n^2} \Leftrightarrow \boxed{L = \frac{Q_{abs}}{3I_n^2 \omega}}$$

$$\text{A.N. } L = \frac{16,9 \cdot 10^3}{3 \times 42,9^2 \times 2\pi \times 120} \Leftrightarrow \boxed{L = 4 \text{ mH}}$$

**Autre méthode** : seule l'inductance consomme de la puissance réactive (la résistance n'en consomme pas car  $\varphi_R = 0$  et le générateur non plus car  $\vec{E}$  et  $\vec{I}$  sont en phase). Le théorème de Boucherot donne  $Q_{abs} = Q_X = 3XI_n^2$ .

**Question 27** Déterminer l'expression de la constante de couplage  $K$  et donner sa valeur dans les unités du système international.

Nous avons  $K = \frac{E}{\omega_m} = \frac{3EI}{3\omega_m I} = \frac{3EI \cos \psi}{3\omega_m I} = \frac{P_m}{3\omega_m I}$  ( $\psi = 0$  et toutes les pertes négligées sauf les pertes Joules).

$$\text{A.N. } K = \frac{23 \cdot 10^3}{3 \times 1800 \times \frac{\pi}{30} \times 42,9} \Leftrightarrow \boxed{K = 0,95 \text{ V.s/rad}}.$$

**Autre méthode :** Pour un angle d'autopilotage nul  $\psi = 0$  et pour le point de fonctionnement nominal, nous avons :

$$V_n^2 = (RI_n + E_n)^2 + (XI_n)^2 \Leftrightarrow \boxed{E_n = \sqrt{V_n^2 - X^2 I_n^2 - RI_n^2}}.$$

$$\text{A.N. } E_n = \sqrt{230^2 - (2\pi \times 120 \times 4 \cdot 10^{-3} \times 42,9)^2 - 0,27 \times 42,9^2} \Leftrightarrow \boxed{E_n = 178,7 \text{ V}}.$$

La vitesse nominale du moteur étant de 1800 tr/min, soit 188,5 rad/s, nous pouvons déterminer la valeur de la constante  $K$  :  $K = \frac{E}{\omega_m}$ .

$$\text{A.N. } K = \frac{178,7}{188,5} \Leftrightarrow \boxed{K = 0,95 \text{ V.s/rad}}.$$

### 4.3.b - Grandeurs électriques maximales en entrée de la machine

**Question 28** Expliquer l'intérêt de maintenir l'angle  $\psi$  à 0.

Pour un couple  $T_m$  donné, un angle d'autopilotage nul permet d'avoir la valeur efficace minimale du courant absorbé par le moteur. Autrement dit cette condition permet à la machine de fournir le maximum de couple pour un courant donné.

**Question 29** En supposant  $\psi = 0$ , calculer le courant efficace  $I_{dec}$  absorbé par la machine lors du décollage de la bourreuse.

$$\text{Pour un angle d'autopilotage nul } \psi = 0, \text{ nous avons } T_{mdec} = 3KI_{dec} \Leftrightarrow \boxed{I_{dec} = \frac{T_{mdec}}{3K}}.$$

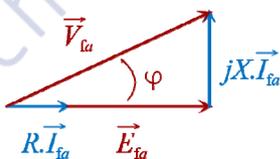
$$\text{A.N. } I_{dec} = \frac{140}{3 \times 0,95} \Leftrightarrow \boxed{I_{dec} = 49,1 \text{ A}}.$$

La valeur trouvée est bien inférieure au couple maximal.

**Question 30** En supposant  $\psi = 0$ , calculer le courant efficace  $I_{fa}$  absorbé par la machine et la tension efficace  $V_{fa}$  aux bornes d'une de ses phases à la fin de la phase d'accélération.

La valeur efficace du courant nécessaire pour fournir le couple  $T_{mfa}$  est  $I_{fa} = \frac{T_{mfa}}{3K}$ . A.N.  $\boxed{I_{fa} = 40,35 \text{ A}}$ .

Pour un angle d'autopilotage nul  $\psi = 0$ , le diagramme de Fresnel est le suivant :



Nous avons  $V_{fa}^2 = (RI_{fa} + E_{fa})^2 + (XI_{fa})^2$

$$V_{fa} = \sqrt{(RI_{fa} + E_{fa})^2 + (L\omega I_{fa})^2} \text{ avec } E_{fa} = K\omega_{fa} \text{ et } \omega = p\omega_{fa}.$$

$$\text{D'où } \boxed{V_{fa} = \sqrt{(RI_{fa} + K\omega_{fa})^2 + (pL\omega_{fa}I_{fa})^2}}.$$

$$\text{A.N. } V_{fa} = \sqrt{\left(0,27 \times 40,35 + 0,95 \times \frac{\pi}{30} \times 1700\right)^2 + \left(4 \times 4 \cdot 10^{-3} \times \frac{\pi}{30} \times 1700 \times 40,35\right)^2} \Leftrightarrow \boxed{V_{fa} = 213,6 \text{ V}}.$$

## 5. Contrôle de la vitesse de la bourreuse

### 5.2 - Modélisation du système asservi

**Objectif :** Finaliser la modélisation de l'asservissement de la vitesse de la bourreuse.

**Question 31** Calculer la valeur du gain  $K_c$  utilisé pour modéliser le capteur de vitesse dans le schéma bloc de la figure 20.

Soit  $\omega_e(t)$ , la vitesse de rotation de l'essieu. Le temps nécessaire pour que l'essieu fasse un tour est  $\frac{2\pi}{\omega_e(t)}$ .

Lorsque la roue de l'essieu fait un tour, le capteur délivre  $Z$  impulsions.

La fréquence des impulsions en sortie du capteur est donc  $f_m(t) = \frac{Z}{2\pi} \omega_e(t) \Leftrightarrow K_c = \frac{K}{2\pi}$ .

A.N.  $K = \frac{200}{2\pi} \Leftrightarrow K_c = 31,8 \text{ rad}^{-1}$ .

**Question 32** Donner l'expression puis la valeur numérique du gain  $K_a$  permettant de satisfaire cette condition.

Le schéma-bloc partiel est représenté sur la figure 8.

Nous avons les relations suivantes :

$$F_c(p) = K_a V_c(p) \quad \varepsilon_F(p) = F_c(p) - F_m(p) \quad F_m(p) = K_c \Omega_e(p) \quad V(p) = R_r \Omega_e(p)$$

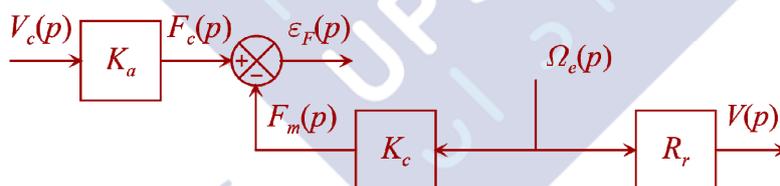


Figure 8 : schéma-bloc partiel de l'asservissement

D'où  $\varepsilon_F(p) = K_a V_c(p) - \frac{K_c}{R_r} V(p)$ . Nous voulons que  $\varepsilon_F(p) = 0$  lorsque  $V(p) = V_c(p) \Rightarrow K_a = \frac{K_c}{R_r}$ .

A.N.  $K_a = \frac{31,8}{0,5} \Leftrightarrow K_a = 63,6 \text{ m}^{-1}$ .

**Question 33** A l'aide des données et des notations introduites figure 22 et tableau 4, exprimer l'énergie cinétique accumulée par la bourreuse. En déduire le moment d'inertie équivalent  $J_{eq}$  vu par une machine.

L'énoncé nous indique que la bourreuse comporte 3 essieux tous pourvus d'une motorisation électrique. Pour déterminer l'énergie cinétique de la bourreuse, nous calculons l'énergie cinétique de chaque solide en mouvement.

Pour les solides en rotation :

- énergie cinétique  $E_{Cm}$  d'une machine :  $E_{Cm} = \frac{1}{2} J_m \omega_m^2$ .

- énergie cinétique  $E_{Crb}$  d'un ensemble {Réducteur + Boîte de vitesse} :  $E_{Crb} = \frac{1}{2} J_r \omega_m^2$

- énergie cinétique  $E_{Ce}$  d'un essieu :  $E_{Ce} = \frac{1}{2} J_e \omega_e^2$ .

Pour les solides en translation :

- énergie cinétique  $E_{Ccb}$  du châssis de la bourreuse :  $E_{Ccb} = \frac{1}{2} M_b v^2$ .

L'énergie cinétique  $E_{cb}$  accumulée par la bourreuse est donc  $E_{cb} = \frac{1}{2} M_b v^2 + 3 \left( \frac{1}{2} J_m \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_T \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_e \omega_e^2 \right)$ .

De plus  $v = R_r \omega_e$  et  $\omega_m = K_r \omega_e$ , d'où  $E_{cb} = \frac{1}{2} \left[ M_b R_r^2 K_r^2 \omega_m^2 + 3 (J_m \omega_m^2 + J_T \omega_m^2 + J_e K_r^2 \omega_m^2) \right]$ .

Cette énergie doit être fournie de manière équitable par les 3 machines, donc  $E_{cb} = \frac{3}{2} J_{eq} \omega_m^2$ .

Finalement  $J_{eq} = \frac{1}{3} M_b R_r^2 K_r^2 + J_m + J_T + J_e K_r^2$ .

A.N.  $J_{eq} = \frac{1}{3} \times 63.10^3 \times 0,5^2 \times \frac{1}{87,5^2} + 51,4.10^{-3} + 60.10^{-3} + 80 \times \frac{1}{87,5^2} \Leftrightarrow \boxed{J_{eq} = 0,8 \text{ kg.m}^2}$ .

### 5.3 - Dimensionnement du correcteur

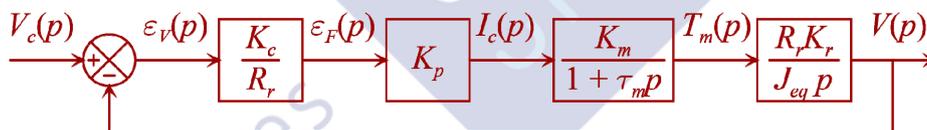
**Objectif:** Vérifier qu'une correction proportionnelle permet de satisfaire le cahier des charges de l'asservissement et en déterminer la valeur du gain  $K_p$ .

**Question 34** Pour le schéma-bloc de la figure 23, donner l'expression :

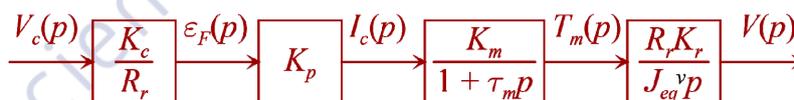
1. de la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{BO}(p)$  ;
2. de la forme canonique de la fonction de transfert en boucle fermée du système non perturbé :

$$H_V(p) = \left. \frac{V(p)}{V_c(p)} \right|_{T_r(p)=0} \quad (\text{on pourra poser } K_V = K_c \cdot K_m \cdot K_p \cdot K_r).$$

En l'absence de perturbation, le schéma-bloc devient :



Pour le calcul de la fonction de transfert en boucle ouverte, nous utilisons le schéma-bloc suivant :



La fonction de transfert  $H_{BO}(p)$  est donnée par : 
$$H_{BO}(p) = \frac{K_c K_p K_m K_r}{J_{eq} p (1 + \tau_m p)}$$

Pour le calcul de la fonction de transfert  $H_V(p)$ , nous utilisons la formule de Black-Nichols avec une chaîne de retour unitaire.

$$H_V(p) = \left. \frac{V(p)}{V_c(p)} \right|_{T_r(p)=0} = \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)} = \frac{\frac{K_V}{J_{eq} p (1 + \tau_m p)}}{1 + \frac{K_V}{J_{eq} p (1 + \tau_m p)}} = \frac{K_V}{K_V + J_{eq} p (1 + \tau_m p)} \Leftrightarrow \boxed{H_V(p) = \frac{1}{1 + \frac{J_{eq}}{K_V} p + \frac{J_{eq} \tau_m}{K_V} p^2}}$$

**Question 35** Exprimer l'erreur de traînage  $\epsilon_T$ . En déduire la valeur minimale de  $K_p$  qui permet de limiter cette erreur à  $\epsilon_{TMax} = 0,03 \text{ m/s}$  lorsque  $\gamma = 0,5 \text{ m/s}^2$  (exigence 201, figure 19, page 18).

Nous appliquons le théorème de la valeur finale, à savoir  $\epsilon_T = \lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon_V(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \epsilon_V(p)$ .

Pour une entrée en rampe  $v_c(t) = \gamma t$ , sa transformée dans le domaine de Laplace est  $V_c(p) = \frac{\gamma}{p^2}$ .

D'autre part  $\varepsilon_V(p) = V_c(p) - V(p) = V_c(p)[1 - H_V(p)] = \frac{V_c(p)}{1 + H_{BO}(p)} = \left[ \frac{J_{eq} p(1 + \tau_m p)}{K_V + J_{eq} p(1 + \tau_m p)} \right] \frac{\gamma}{p^2}$ .

D'où  $p\varepsilon_V(p) = \left[ \frac{J_{eq} \gamma(1 + \tau_m p)}{K_V + J_{eq} p(1 + \tau_m p)} \right]$ , finalement  $\varepsilon_T = \frac{J_{eq} \gamma}{K_V}$ .

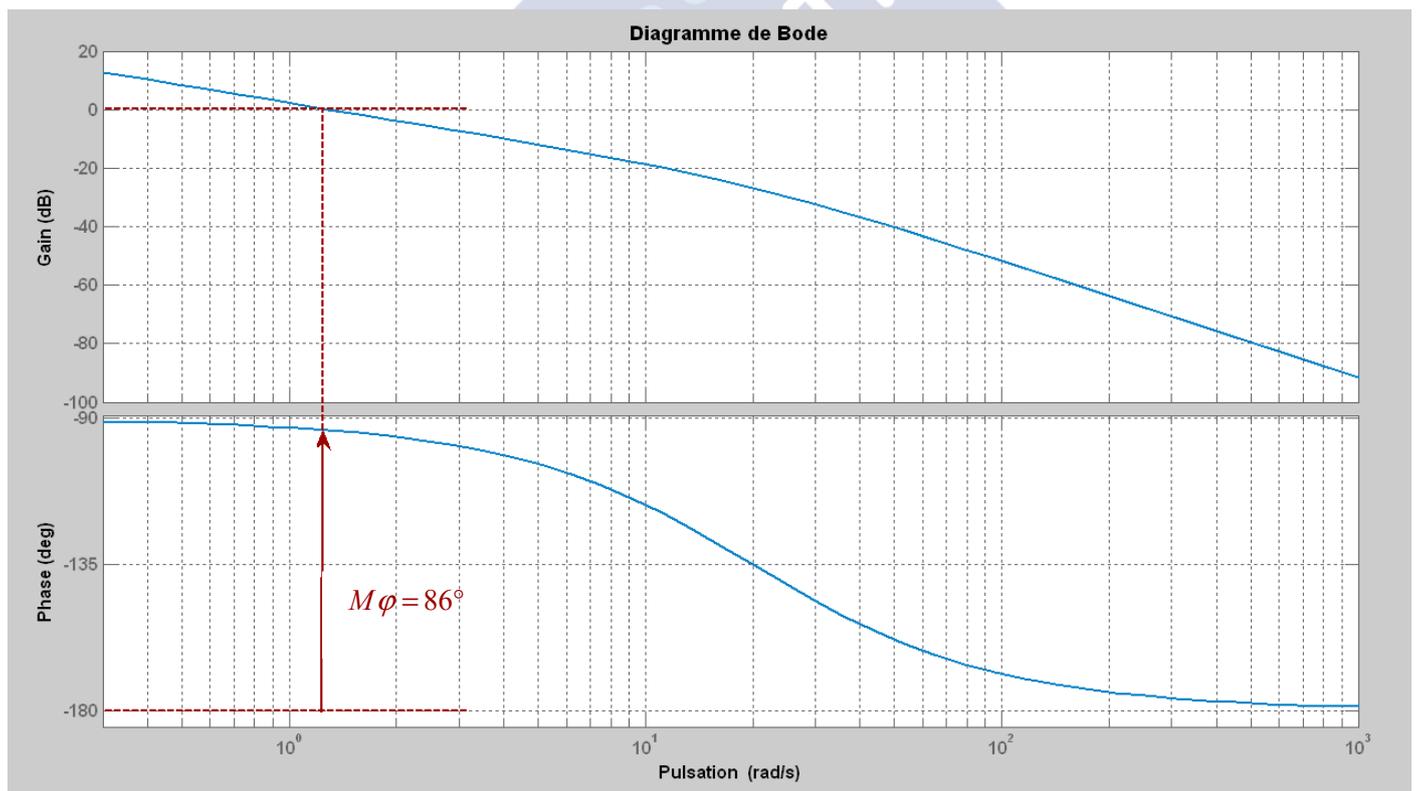
Nous désirons obtenir une erreur de traînage maximale de  $\varepsilon_{Tmax} = 0,03 \text{ m/s} \Rightarrow \frac{J_{eq} \gamma}{K_V} \leq \varepsilon_{Tmax} \Leftrightarrow K_V \geq \frac{J_{eq} \gamma}{\varepsilon_{Tmax}}$ .

$\Leftrightarrow K_p \geq \frac{J_{eq} \gamma}{\varepsilon_{Tmax} K_c K_m K_r} = K_{pmin}$

A.N.  $K_{pmin} = \frac{0,8 \times 0,5}{0,03 \times 32 \times 2,85 \times \frac{1}{87,5}} \Leftrightarrow K_{pmin} = 12,8$ .

**Question 36** Sur le document réponse 1, représenter à l'aide d'une flèche la marge de phase du système. Déterminer graphiquement la valeur de cette marge de phase.

Pour déterminer la marge de phase, nous cherchons la pulsation  $\omega_{c0}$  pour laquelle le gain est nul. Pour cette pulsation  $\omega_{c0}$ , nous avons l'argument qui vaut  $\varphi(\omega_{c0}) = -94^\circ$ . Pour déterminer la marge de phase, nous retranchons  $-180^\circ$  à la phase trouvée  $\varphi(\omega_{c0}) \Rightarrow M\varphi = 86^\circ$ .



**Question 37** À l'aide du digramme de Bode du document réponse 1, donner la valeur de la marge de gain.

La fonction de transfert en boucle ouverte étant un système d'ordre 2, la marge de gain est infinie :

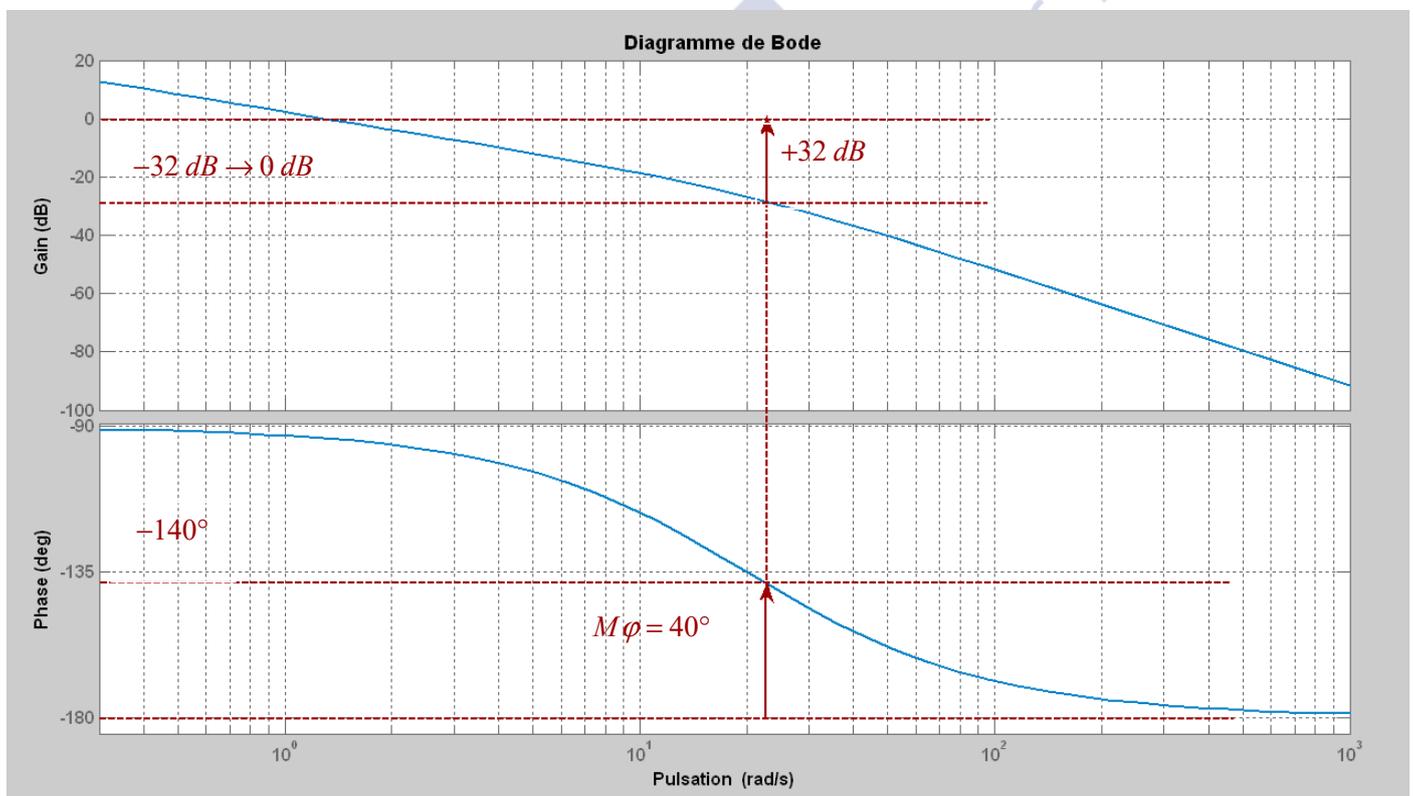
$MG = +\infty$ .

**Question 38** À l'aide du document réponse 1, déterminer la valeur maximale du gain  $K_p$ , qui permet de satisfaire les exigences 2031 (marge de gain supérieure ou égale à  $10\text{ dB}$ ) et 2032 (marge de phase supérieure ou égale à  $40^\circ$ ) du diagramme de la figure 19.

La fonction de transfert en boucle ouverte étant un système d'ordre 2, la marge de gain est infinie quelque soit la valeur de  $K_p$ . L'exigence 2031 est toujours vérifiée.

Pour avoir une marge de phase de  $40^\circ$ , il faut que la phase vaille  $-140^\circ$  [ $40 = -140 - (-180)$ ] pour laquelle le gain total est nul, il faut donc remonter la courbe de gain. Nous cherchons la pulsation  $\omega_2$  pour laquelle la phase (qui est indépendante de la valeur de  $K_p$ ) vaut  $-140^\circ$  et regardons la valeur du gain correspondante à cette pulsation, ici  $G(\omega_2) = -32\text{ dB}$ . Pour que la marge de phase soit définie à la pulsation  $\omega_2$ , il faut que le gain total soit nul. Il faut donc remonter la courbe de gain de  $+32\text{ dB}$ .

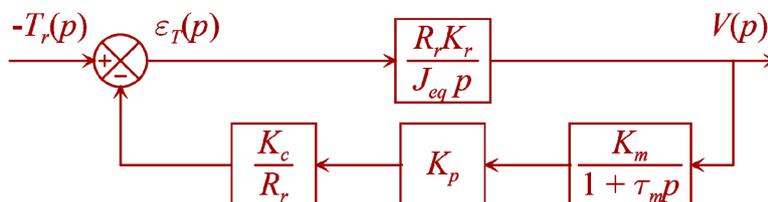
$$\Rightarrow 20\log(K_{pmax}) = 32 \Leftrightarrow K_{pmax} = 10^{1,6} = 39,8$$



**Question 39** Déterminer l'expression, sous forme canonique, de la fonction de transfert relative à l'influence de

la perturbation :  $H_p(p) = \frac{V(p)}{T_r(p)} \Big|_{V_c(p)=0}$

Le schéma-bloc qui permet de déterminer la fonction de transfert relative à l'influence de la perturbation est le suivant :



Nous appliquons la formule de Black-Nicholls :

$$H_p(p) = \frac{V(p)}{T_r(p)} \Big|_{V_c(p)=0} = - \frac{\frac{R_r K_r}{J_{eq} p}}{1 + \frac{K_c K_m K_p K_r}{J_{eq} p (1 + \tau_m p)}} = - \frac{R_r K_r (1 + \tau_m p)}{K_V + J_{eq} p (1 + \tau_m p)} \Leftrightarrow \boxed{H_p(p) = - \frac{R_r K_r}{K_V} \frac{(1 + \tau_m p)}{\left(1 + \frac{J_{eq}}{K_V} p + \frac{J_{eq} \tau_m}{K_V} p^2\right)}}$$

**Question 40** Déterminer l'expression et la valeur de la vitesse  $v(t)$  atteinte par la boureuse en régime permanent en réponse à un échelon de couple résistant d'amplitude  $T_{rMax}$ . Conclure quant au respect de l'exigence 202 du diagramme des exigences de la figure 19 (page 18).

Nous appliquons le théorème de la valeur finale  $V_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pV(p)$ .

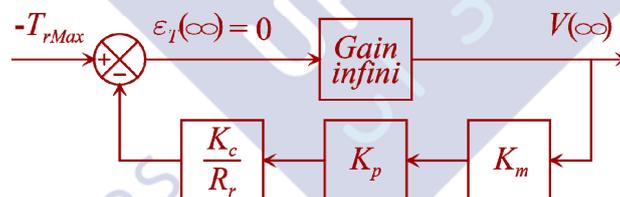
Nous appliquons un échelon de couple d'amplitude  $T_{rMax} \Rightarrow T_r(p) = \frac{T_{rMax}}{p}$ .

D'où  $V(p) = - \frac{R_r K_r (1 + \tau_m p)}{K_V + J_{eq} p (1 + \tau_m p)} T_r(p) \Leftrightarrow pV(p) = - \frac{R_r K_r (1 + \tau_m p)}{K_V + J_{eq} p (1 + \tau_m p)} T_{rMax}$

$\Leftrightarrow \boxed{V_0 = \lim_{p \rightarrow 0} pV(p) = - \frac{R_r T_{rMax}}{K_c K_m K_p}}$

A.N.  $V_0 = - \frac{0,5 \times 50}{32 \times 2,85 \times 25} \Leftrightarrow \boxed{V_0 = -0,01 \text{ m/s}}$

*Autre méthode* : nous raisonnons sur le schéma-bloc en régime permanent, pour un échelon en entrée, toutes les grandeurs sont constantes. La sortie d'un intégrateur étant constante, nous avons 0 en entrée de ce dernier.



Nous avons donc  $\epsilon_T(\infty) = -T_{rMax} - \frac{K_c K_p K_m}{R_r} V(\infty) = 0 \Leftrightarrow \boxed{V(\infty) = - \frac{R_r}{K_c K_m K_p} T_{rMax}}$

L'exigence 202 du diagramme des exigences de la figure 19 est bien respectée.

**Question 41** Conclure quant au choix d'un correcteur proportionnel dans la boucle d'asservissement de la vitesse de déplacement de la boureuse.

La valeur  $K_p = 25$  ( $K_{pmin} < K_p < K_{pmax}$ ) d'un correcteur proportionnel permet de respecter toutes les exigences du cahier des charges relatives à l'asservissement de vitesse.

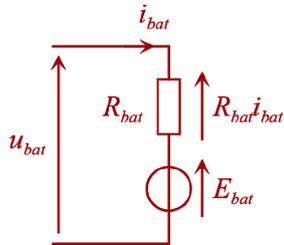
## 6. Chargement de la batterie

### 6.2 - Lissage du courant absorbé par la batterie

**Objectif :** Déterminer l'inductance de lissage du hacheur de recharge

**Question 42** Calculer la valeur de la tension  $u_{bat}$  à appliquer à la batterie au début de la charge.

Le schéma électrique équivalent de la batterie au début de la charge est représentée donnée figure 8.



La loi des mailles permet d'écrire :  $u_{bat} = R_{bat} \cdot i_{bat} + E_{bat}$

A.N.  $u_{bat} = 2,2 \times 60 + 420 \Leftrightarrow u_{bat} = 552 V$

Figure 8 : schéma électrique équivalent de la batterie

**Question 43** Compléter les chronogrammes esquissés sur le document réponse 2 en y traçant les évolutions de la tension  $u_L$  et du courant  $i_{bat}$ .

Le transistor  $K$  est passant pour  $0 \leq t \leq \alpha T$  et bloqué pour  $\alpha T \leq t \leq T$ . Lorsque le transistor  $K$  est bloqué, la diode  $D$  est passante (hypothèse de la conduction continue).

Les schémas électriques équivalents pour chaque phase de fonctionnement sont représentés figure 9.

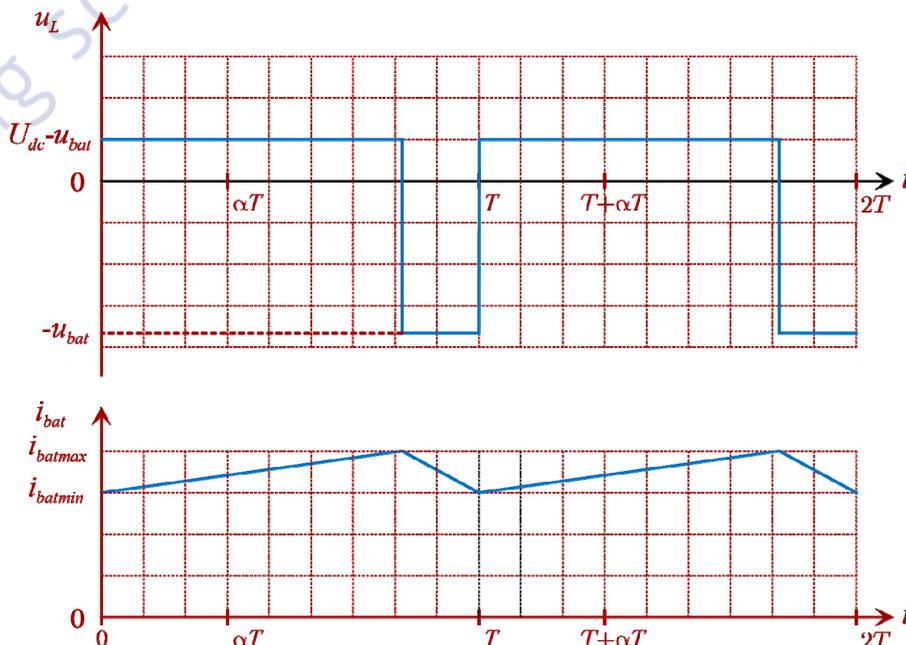


Figure 9 : schémas électriques équivalents pour chaque phase de fonctionnement

La loi des mailles permet d'écrire :  $u_L = U_{dc} - u_{bat} > 0$ . La loi des mailles permet d'écrire :  $u_L = -u_{bat} < 0$ .

Le courant  $i_{bat}$  croît linéairement.

Le courant  $i_{bat}$  décroît linéairement.



**Question 44** Déterminer l'expression de  $\langle u_{bat} \rangle$  en fonction de  $\alpha$  et  $U_{dc}$ . En déduire la plage de variation du rapport cyclique  $\alpha$  de commande du hacheur au cours d'une recharge.

Le courant étant périodique, la tension moyenne aux bornes de l'inductance est nulle  $\langle u_L \rangle = 0$ .

Nous utilisons la méthode des aires pour la calculer :

$$\langle u_L \rangle = \frac{(U_{dc} - u_{bat})\alpha T - u_{bat}(T - \alpha T)}{T} = 0 \Leftrightarrow \boxed{u_{bat} = \alpha U_{dc}}$$

$$\text{Au début de la charge } u_{bat} = 552 \text{ V} \Rightarrow \alpha = \frac{552}{700} \Leftrightarrow \boxed{\alpha_{min} = 0,79}$$

$$\text{A la fin de la charge } u_{bat} = 588 \text{ V (} 140 \times 4,2 \text{ V)} \Rightarrow \alpha = \frac{588}{700} \Leftrightarrow \boxed{\alpha_{max} = 0,84}$$

**Question 45** Déterminer l'expression de l'ondulation du courant  $\Delta i_{bat}$  absorbé par la batterie en fonction de  $\alpha$ ,  $U_{dc}$ ,  $L$  et  $T$ .

Nous avons vu à la question 43 que  $u_L = L \frac{di_{bat}}{dt} = U_{dc} - u_{bat}$  pour  $0 \leq t \leq \alpha T$  avec  $i_{bat}(0) = i_{batmin}$ .

$$\text{Soit } \frac{di_{bat}}{dt} = \frac{U_{dc} - u_{bat}}{L} = (1 - \alpha) \frac{U_{dc}}{L}$$

$$\text{En intégrant, nous obtenons } i_{bat}(t) = (1 - \alpha) \frac{U_{dc}}{L} t + i_{bat}(0) = (1 - \alpha) \frac{U_{dc}}{L} t + i_{batmin}$$

$$\text{De plus } i_{bat}(\alpha T) = i_{batmax} = (1 - \alpha) \frac{U_{dc}}{L} \alpha T + i_{batmin} \Rightarrow \boxed{\Delta i_{bat}(\alpha) = i_{batmax} - i_{batmin} = \frac{U_{dc}}{LF} \alpha (1 - \alpha)}$$

**Question 46** Déterminer la valeur minimale de l'inductance  $L$  qui permet de limiter l'ondulation du courant  $i_{bat}$  à la valeur souhaitée au cours du chargement de la batterie.

L'ondulation de courant est maximale pour  $\alpha = 0,5$  puis elle décroît si  $\alpha$  s'écarte de 0,5.

Le cas le plus défavorable pour l'ondulation correspond donc à  $\alpha_{min}$ .

$$\text{Pour respecter une ondulation de courant inférieur à } 3 \text{ A, il faut que } \Delta i_{bat}(\alpha_{min}) < 3 \Leftrightarrow \boxed{L > \frac{U_{dc}}{3F} \alpha_{min} (1 - \alpha_{min})}$$

$$\text{A.N. } L > \frac{700}{3 \times 20.10^3} \times 0,79 \times (1 - 0,79) \Leftrightarrow \boxed{L_{min} = 2 \text{ mH}}$$